



Homogénéisation des composites linéaires : Etude des comportements apparents et effectif

Moncef Salmi

► To cite this version:

Moncef Salmi. Homogénéisation des composites linéaires : Etude des comportements apparents et effectif. Autre. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2012. Français. NNT : 2012CLF22249 . tel-00766795

HAL Id: tel-00766795

<https://theses.hal.science/tel-00766795>

Submitted on 19 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D.U. 2249

EDSPIC : 564

Université BLAISE PASCAL - Clermont II

École Doctorale

Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

MÉMOIRE DE T H È S E

Proposé pour l'obtention du grade de :

Docteur d'Université

Spécialité : Mécanique du Solide

par

Moncef SALMI

**Homogénéisation des composites linéaires :
Étude des comportements apparents et effectif**

Soutenue publiquement le 2 juillet 2012 devant le jury :

M. Karam SAB	École des Ponts ParisTech	Président
M. Samuel FOREST	École des Mines ParisTech	Rapporteur
M. Yann MONERIE	IRSN	Rapporteur
M. François AUSLENDER	Université Blaise Pascal	Co-Directeur de thèse
M. Michel BORNERT	École des Ponts ParisTech	Co-Directeur de thèse
M. Michel FOGLI	Université Blaise Pascal	Conseiller Scientifique

Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI)

Université Blaise Pascal et Institut Français de Mécanique Avancée

Remerciements

Ce travail réalisé est le fruit du soutien de nombreuses personnes qui ont rendu ce projet possible, fructueux et très enrichissant. Cette expérience sera, j'en demeure persuadé, un grand tremplin pour ma vie professionnelle mais aussi personnelle. Ces quelques lignes n'assouviront certainement pas toute la reconnaissance que je porte à leur égard, je tenterai néanmoins à m'y essayer.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse François AUSLENDER pour tout ce qu'il m'a apporté du point de vue scientifique, professionnel et personnel. Son encadrement quotidien pédagogique et sa passion pour la science n'ont fait qu'augmenter ma motivation et mon investissement dans ce projet. Je tiens à remercier également mon deuxième directeur de thèse Michel BORNERT pour son encadrement très instructif et grandement efficace ainsi que pour sa disponibilité malgré son emploi du temps souvent très garni. Mes remerciements s'adressent également à Michel FOGLI pour les conseils scientifiques très précieux qu'il nous a fournis tout au long de ces années.

Je remercie les membres du jury, messieurs Karam SAB son président, Samuel FOREST et Yann MONERIE les rapporteurs de ce manuscrit, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce travail.

Je remercie également les membres du LaMI, ainsi que les membres de l'IFMA et de l'UBP de m'avoir donné les moyens matériels et humains nécessaires pour mener à bien mes activités de recherche et d'enseignement tout au long de ces années. Mention spéciale aux thésards et stagiaires du LaMI qui m'ont fait partager une ambiance de travail très agréable et profondément amicale qui me manquera beaucoup. Merci particulièrement à Nico et Hamid mes actuels camarades de bureau, à Ben, Polo, Hahn, Pierro, Gillaume, Antoine, Pascal et Pierre mes anciens camarades de Bureau. Je remercie également mes compagnons depuis mes premiers jours au LaMI : Mahmoud, Saber, Khaled, Omar, Nabil, Agnès, Cécile, Miguel, Vincent, Antoine ainsi que les nouvelles recrues Bassam et Sayf.

Je ne remercierai jamais assez ceux qui me sont les plus chers au monde, mes parents, d'avoir été toujours là pour moi et sans qui je ne serai pas là. Merci à eux d'avoir fait toute cette distance pour assister à ma soutenance de thèse et d'être à mes côtés en ce jour très particulier. Je remercie également mon frère Anas et lui souhaite tout le bonheur dans sa vie. Un grand merci spécialement à ma fiancée Rim, d'être toujours à mes côtés, de partager mes jours et de les rendre encore plus beaux.

Résumé

Les travaux effectués au cours de cette thèse portent principalement sur la construction de nouvelles bornes du comportement effectif des matériaux biphasés de type matrice-inclusions à comportement linéaire élastique. Dans un premier temps, au vue d'encadrer le comportement effectif, nous nous sommes inspirés des travaux de Huet (J. Mech Phys Solids 1990 ; 38 :813-41) qui montrent que les moyennes d'ensemble du comportement apparent d'un composite, pour des conditions aux limites (CL) en déplacements affines ou en contraintes homogènes appliquées sur des VE carrés (en 2D), fournissent respectivement une borne supérieure ou inférieure du comportement macroscopique. Bien que ces bornes conduisent à de bonnes estimations du comportement effectif pour des faibles ou moyens contrastes entre les différents constituants du composite, on observe cependant un écart très important entre ces deux bornes dans le cas des forts contrastes. Cette limitation est due au fait que l'énergie de déformation provenant des particules coupant la frontière du VE est surévaluée quand des CL en déformations ou en contraintes homogènes sont appliquées directement aux particules rigides ou aux pores intersectés. Afin de corriger cette limitation, nous avons construit une nouvelle approche numérique qui repose sur des VE non-carrés construits à partir d'assemblages de cellules de Voronoï, chaque cellule contenant une inclusion entourée de matrice, permettant ainsi d'éviter l'application directe des CL sur les inclusions. En utilisant les théorèmes énergétiques de l'élasticité linéaire et des procédures de moyennisation appropriées, un nouvel encadrement du comportement effectif est obtenu. L'application de cette approche au cas d'un composite biphasé, constitué d'une matrice isotrope et de fibres cylindriques parallèles et identiques distribuées aléatoirement dans le plan transverse, conduit à des bornes plus resserrées que celles obtenues par Huet et convergeant rapidement vers le comportement effectif quand la taille du VE augmente, même dans les situations de fort contraste. Dans un deuxième temps, nous présentons un second modèle, de nature semi-analytique, permettant d'obtenir à nouveau de nouvelles bornes (cette fois quasi-analytiques) du comportement effectif des matériaux composites de type matrice-inclusions. Cet autre modèle a pour but de

diminuer les temps de calcul importants inhérents à la première approche qui nécessite de recourir à des méthodes numériques pour calculer les comportements apparents. Le modèle semi-analytique présenté repose sur la notion de Motif Morphologique Représentatif (MMR) que l'on applique aux VE non-carrés issus d'assemblages de cellules de Voronoï. Dans la troisième partie de ce travail, en nous appuyant sur le premier modèle de nature numérique présenté au début de la thèse, nous avons réalisé une étude statistique des comportements apparents à l'aide de simulations de type Monté Carlo. Puis, à partir des tendances issues de cette étude statistique, nous avons proposé et mis en IJuvre de nouveaux critères de tailles de VER. Au vu des résultats numériques obtenus lors de l'application de ces critères, nous avons constaté, pour les composites linéaires élastiques de type matrice-inclusions, que les critères de VER prenant en compte les fluctuations de la microstructure conduisent à des tailles de VER plus grandes que celles obtenues par les critères de VER prenant uniquement en compte les fluctuations liées aux CL.

Mots clés : Comportement apparent, Comportement effectif, Bornes, Elasticité linéaire, Composites, Microstructure aléatoire, Variabilité, Volume Elémentaire Représentatif, Motif Morphologique Représentatif

Abstract

This work is devoted to the derivation of improved bounds for the effective behavior of linear elastic matrix-inclusion composites by means of a strategy which is inspired by the works of Huet (J. Mech Phys Solids 1990 ; 38 :813-41). As shown by the former author, the effective properties of random linear composites can be bounded by ensemble averages of their apparent elastic moduli defined on square (or cubic) volume elements (VEs) and computed with either affine displacement Boundary Conditions (BC) or uniform traction BC. However, in case of high contrast between the phases of the composite, the discrepancy between the upper and lower bounds remains significant, even for large values of the VE size. This occurs because the contribution to the total potential (or complementary) energy of the particles (or pores) which intersect the edges of the VE becomes unphysically very large when uniform BC are directly applied to the particles. To avoid such limitations, we consider non-square (or non-cubic) VEs consisting in simply connex assemblages of cells, each cell being composed of an inclusion surrounded by the matrix, thus forbidding any direct application of BC to the particles. By applying both the classical energy bounding theorems to non-square VEs and appropriate averaging procedures, new bounds for the effective behavior are derived. Their application to a two-phase composite composed of an isotropic matrix and aligned identical fibers randomly and isotropically distributed in the transverse plane leads to sharper bounds which converge quickly with the VE size, even for infinite contrasts. Secondly, we present a closed-form method to bound the effective behavior of linear elastic matrix-inclusion composites. This second model aims to reduce the computational costs of the first one which requires the use of numerical calculations to derive the apparent behaviors. The second method is based on the Morphological Representative Pattern (MRP) approach which is applied to the non-square VEs. In the third part of this work, making use of the first abovementioned bounding approach, a statistical study of the apparent behaviour is carried out by means of Monte Carlo simulations. Then relying on the trends derived from this study, some proposals to define RVE criteria are presented.

They are applied to fiber-matrix linear elastic composite for various contrasts and volume fractions. It's found that RVE criteria which accounts for the individual fluctuations of the microstructure lead to larger RVE sizes than the ones obtained from RVE criteria which only take into account the fluctuations induced by the BC.

Key words : Apparent behavior, Effective behavior, Bounds, Linear elasticity, Matrix-inclusion composites, Random microstructure, Variability, Representative Volume Element, Morphologically Representative Pattern

Table des matières

Introduction	1
1 Nouvelles bornes du comportement effectif	5
1.1 Introduction	5
1.2 Quelques notions préalables	9
1.3 Bornes classiques du comportement effectif basées sur le comportement apparent	10
1.3.1 Définition du comportement apparent	10
1.3.2 Bornes des propriétés effectives	12
1.3.3 Limitations de l'approche classique	13
1.4 Nouvelles bornes pour les composites de type matrice-inclusions	18
1.4.1 Nouvelle construction de Volume Élémentaire	18
1.4.2 Nouvelles bornes	20
1.4.3 Description du processus aléatoire	22
1.5 Application : Étude de la réponse transverse d'un composite à microstructure aléatoire	25
1.5.1 Description du matériau	26
1.5.2 Génération de la microstructure	27
1.5.3 Partition en cellules de Voronoï et génération des VE non-carrés . . .	28
1.5.4 Calcul du comportement apparent	28
1.5.5 Bornes du comportement effectif	33
1.5.6 Calcul des bornes pour un nombre fini de réalisations	34

1.6	Spécificités liées à la cellule carrée	36
1.7	Mise en œuvre numérique	39
1.7.1	Approche basée sur les VE de type Voronoï	39
1.7.2	Approche basée sur des VE carrés	41
1.8	Résultats	43
1.8.1	Equivalence entre les processus stochastiques de type VE1 et VE2 . .	44
1.8.2	Étude pour divers contrastes	45
1.8.3	Composites à fraction volumique plus élevée	50
1.8.4	Conclusion	53
2	Comparaison avec l'approche par motifs morphologiques représentatifs	57
2.1	Objectifs	57
2.2	Rappels sur les approches d'homogénéisation en champs moyens en élasticité linéaire	58
2.2.1	Bornes de Voigt et Reuss	60
2.2.2	Estimations et bornes de Hashin et Shtrikman	60
2.2.3	Les approches par Motifs Morphologiques Représentatifs	64
2.3	Nouvelles bornes généralisées de type Voigt et Reuss	68
2.4	Résultats	72
2.4.1	Contraste infini	73
2.4.2	Contraste fini	75
2.4.3	Conclusion	77
3	Étude statistique des comportements apparents	81
3.1	Introduction	81
3.2	Quantités considérées	82
3.3	Résultats : Coefficient de variation	85
3.3.1	Contrastes infinis	85
3.3.2	Matériaux biphasés	88

3.4	Résultats : Densité de probabilité	91
3.4.1	Contrastes infinis	92
3.4.2	Matériaux biphasés	96
3.5	Résultats : Écart à l'isotropie	99
3.5.1	Contrastes infinis	100
3.5.2	Matériaux biphasés	101
3.6	Conclusion	102
4	Tailles de VER	105
4.1	Introduction	105
4.2	VER de calcul basé sur l'indépendance des CL	109
4.3	VER de type milieu équivalent	111
4.3.1	Critère de VER basé sur le coefficient de variation	112
4.3.2	Critère de VER basé sur toutes les sources de fluctuations	114
4.4	Comparaison des divers critères de tailles de VER et discussion	119
4.5	Conclusions	120
	Conclusions et perspectives	123
	Bibliographie	131
	Annexes	137
A	Principe de maillage du VE de Voronoï	139
A.1	Paramètres de maillage dans le sens radial	140
A.1.1	Matrice	140
A.1.2	Inclusion	141
A.2	Paramètres de maillage dans le sens orthoradial	142
A.2.1	Calcul des densités	142
A.2.2	Test de pertinence du maillage	143

B Algorithmes de calcul	145
B.1 Approche par les VE non-carrés	145
B.2 Approche par les VE carrés	145
C Démonstration des nouvelles bornes dans le cas des CLCH	149

Introduction

La plupart des matériaux existant dans la nature (minéraux, tissus biologiques, etc.) ou conçus par l’homme (matériaux composites, aciers, béton, etc.) sont en réalité des matériaux hétérogènes. Afin de déterminer leurs propriétés macroscopiques par une méthode déductive, il est nécessaire de disposer d’une modélisation efficace capable de lier le comportement local des différents constituants du matériau hétérogène et leur distribution spatiale avec le comportement global du matériau hétérogène à l’échelle de la structure. Pour ce faire, une hypothèse de séparation d’échelles est souvent employée

$$d \ll \ell \ll L_{struct} \quad (1)$$

où d est la taille des hétérogénéités des constituants représentant l’échelle microscopique, ℓ est la taille d’un point de la structure représentant l’échelle mésoscopique et L_{struct} la taille de la structure représentant l’échelle macroscopique. La première inégalité dans (1) peut être remplacée par $d < \ell$ en fonction de la composition du matériau. L’hypothèse de séparation d’échelles permet de définir un matériau homogène équivalent fictif sur un Volume Élémentaire (VE) de taille caractéristique ℓ appelé Volume Élémentaire Représentatif (VER) de manière à ce qu’un calcul de structure effectué sur le matériau équivalent fictif fournisse des champs de déformation et de contrainte macroscopiques correspondant à la valeur moyenne (à l’échelle du VER) des champs locaux existants dans le matériau hétérogène réel. Quand un tel matériau homogène équivalent existe, il permet d’effectuer des calculs de structure nettement moins coûteux que ceux effectués sur le matériau hétérogène. Afin d’être en mesure de réaliser de tels calculs, il est nécessaire d’une part de déterminer le comportement effectif du matériau en question et d’autre part la taille minimale du VER : au moins afin de vérifier que l’hypothèse de séparation d’échelles est bien satisfaite pour le calcul de structure considéré mais aussi parce que la plupart des approches numériques utilisées pour évaluer le comportement effectif nécessite cette information.

L’étude qui est présentée s’articule autour de deux objectifs principaux. Le premier ob-

jectif consiste à construire un nouveau modèle permettant d’obtenir de nouvelles bornes du comportement effectif des composites de type matrice-inclusions à partir du calcul de leurs propriétés apparentes. Nous souhaitons en particulier améliorer les bornes proposées par Huet [31] qui présentent un écart important dans le cas de forts contrastes entre les phases constituant le matériau hétérogène. Le deuxième objectif de ce travail vise à présenter de nouveaux critères de tailles de VER. En effet, bien que des progrès notables aient été réalisés concernant la notion de VER et la détermination de sa taille depuis la définition proposée par Hill [28], par exemple voir [46, 33, 20, 43, 54, 19, 46, 16], la question de la définition et surtout de la détermination de la taille du VER reste néanmoins ouverte. Afin d’apporter une contribution dans ce domaine, nous utilisons la nouvelle approche présentée dans la première partie du travail de thèse afin de calculer les comportements apparents, d’étudier leur variabilité et d’intégrer cette dernière dans la définition de nouveaux critères de tailles de VER. Pour ce faire, le mémoire est scindé en quatre chapitres principaux : les deux premiers chapitres concernent la détermination de nouvelles bornes du comportement effectif alors que les chapitres 3 et 4 sont consacrés aux études statistiques des comportements apparents en vue de déterminer des tailles de VER.

Dans le premier chapitre nous présentons une nouvelle approche permettant d’obtenir des nouvelles bornes du comportement effectif de matériaux hétérogènes à microstructure aléatoire de type matrice-inclusions dont le comportement des phases est élastique linéaire isotrope. Cette approche est inspirée de celle présentée par Huet [31] et repose sur des procédures de moyennisation appropriées des comportements apparents. Nous effectuons ensuite une étude comparative entre les bornes issues de cette nouvelle approche et celles issues de l’approche de type Huet [31] qui, comme nous l’avons vu, ne fournissent pas des résultats satisfaisants pour les matériaux hétérogènes présentant un fort contraste entre ses phases. Pour ce faire, nous commençons par rappeler l’approche de Huet pour le calcul des bornes du comportement effectif. Nous présentons ensuite notre méthode en étudiant les similitudes et les différences avec l’approche classique de type Huet. Afin de se ramener à des calculs $2D$ peu coûteux numériquement, nous appliquons alors la nouvelle approche au cas particulier d’un composite constitué d’une matrice renforcée ou assouplie par des fibres cylindriques, identiques, parallèles les unes aux autres et distribuées aléatoirement de manière isotrope dans le plan transverse. Après avoir explicité la mise en œuvre numérique du modèle, nous exposons les différents résultats issus de cette nouvelle approche pour différents contrastes allant du matériau poreux jusqu’au composite renforcé par des fibres rigides et nous les comparons à ceux issus de la littérature afin de pouvoir évaluer la pertinence de

l'approche présentée.

Le deuxième chapitre est consacré à l'élaboration d'un deuxième modèle permettant d'obtenir de nouvelles bornes semi-analytiques du comportement effectif des matériaux hétérogènes de type matrice-inclusions considérés au chapitre 1. Le travail présenté dans ce chapitre a pour but de construire une approche semi-analytique facile à mettre en œuvre et peu coûteuse en temps de calcul. Pour cela, afin d'éviter de recourir à des calculs par éléments finis pour déterminer les comportements apparents, nous utilisons l'approche par motifs morphologiques représentatifs (MMR) développé par Stolz et Zaoui [55] et Bornert et al [6] en nous fondant sur une description de la microstructure issue de la discrétisation du matériau hétérogène en cellules de Voronoï. Les bornes obtenues par cette deuxième approche sont alors comparées à celles obtenues au chapitre 1 et aux bornes classiques des méthodes d'homogénéisation en champs moyens.

Dans le troisième chapitre, nous présentons une étude statistique détaillée du comportement apparent. L'intérêt d'une telle étude est double : d'une part, il est souvent utile de connaître, au moins partiellement la statistique des propriétés apparentes afin de quantifier non seulement leur valeur moyenne mais aussi leur dispersion. Une telle connaissance de la variabilité des propriétés apparentes nous permettra de proposer au chapitre 4 des critères de taille de VER incorporant cette variabilité. Le deuxième intérêt consiste à traiter les cas pour lesquels il n'y a pas de VER - par exemple quand la microstructure du matériau n'est pas stationnaire ou quand l'hypothèse de changement d'échelle n'est pas vérifiée. Pour ces situations, la seule information dont on peut disposer sur le comportement d'un VE de matériau au sein de la structure considérée correspond à la statistique (partielle ou totale) du comportement apparent. La connaissance de cette dernière couplée à des méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis stochastiques peut être mise à profit pour résoudre des problèmes de calcul de structures pour lesquels l'hypothèse de changement d'échelle n'est pas satisfaite. L'étude statistique que nous menons sur le comportement apparent s'intéresse aux évolutions en fonction de la taille des VE de calcul de l'écart entre les bornes supérieure et inférieure du comportement effectif d'une propriété donnée, du coefficient de variation des modules apparents, de l'allure des fonctions de densité de probabilité des modules apparents et de l'écart à l'isotropie du comportement apparent.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à la présentation de critères de taille de VER. Dans ce chapitre, nous commençons par fournir une étude détaillée de l'état de l'art portant sur les différentes définitions de VER proposées et méthodologies utilisées pour

calculer la taille minimale d'un VER. Nous proposons ensuite des critères de taille de VER pour les composites considérés au cours de notre étude. Nous construisons ces critères en nous basant sur les tendances obtenues lors des études statistiques que nous avons réalisées sur les comportements apparents au chapitre 3. Nous scindons ces critères en deux groupes. Dans le premier groupe sont rassemblés les critères de calcul de taille de VER qui visent à calculer les propriétés effectives d'un matériau donné. Le deuxième groupe est constitué par les critères de VER qui considèrent que la taille du VER est atteinte quand on peut remplacer un matériau hétérogène par un matériau homogène équivalent dans un problème de calcul de structures. Nous clôturons ce cinquième chapitre par un tableau récapitulatif reprenant les tailles de VER que nous avons calculées avec nos différents critères en les comparant à des tailles de VER issues de la littérature.

Tout au long de ce mémoire, nous utilisons des notations tensorielles standards. Les ordres des tenseurs se comprennent clairement quand ils sont resitués dans leur contexte. Les produits tensoriels contenant des points signifient une sommation sur les indices répétés. Par exemple, $L : \varepsilon = L_{ijkl}\varepsilon_{kl}e_i \otimes e_j$ et $E :: F = E_{ijkl}F_{kl}ij$ où $(e_i, i = 1, 3)$ est une base cartésienne orthonormale indépendante du temps et où \otimes indique le produit tensoriel.

En ce qui concerne les aspects probabilistes, toutes les quantités aléatoires (variables et champs) considérées dans ce travail, sont supposées définies dans le même espace de probabilité $\{\Theta, F, P\}$, où Θ est l'espace des échantillons (ou des épreuves), F est une σ -algèbre (i.e. une tribu) de sous ensembles de Θ et P est une probabilité sur F . Par ailleurs, on utilisera les notations suivantes : Si $\xi = (\xi(\omega), \omega \in \Theta)$ est une variable aléatoire (scalaire ou vectorielle) définie sur $\{\Theta, F, P\}$, pour tout $\omega \in \Theta$, $\xi(\omega)$ est une ω -réalisation de ξ (i.e. la réalisation de ξ associée à l'épreuve ω). Par soucis de simplification, la notation $\xi(\omega)$ sera aussi utilisée pour représenter une variable aléatoire. De la même façon, si $\psi = (\psi(x, \omega), x \in \Delta, \omega \in \Theta)$ est un champ aléatoire (scalaire ou vectoriel) basé sur $\{\Theta, F, P\}$ et indexé sur $\Delta \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$), pour tout $\omega \in \Theta$ fixé, la fonction $x \rightarrow \psi(x, \omega)$ est une ω -réalisation de ψ . A nouveau pour simplifier les notations, $\psi(x, \omega)$ représentera à la fois cette réalisation ainsi que le champ aléatoire lui-même. Enfin, l'espérance mathématique et l'écart-type d'une variable aléatoire quelconque a seront respectivement notés $E(a)$ et $\sigma(a)$.

Chapitre 1

Nouvelles bornes du comportement effectif

1.1 Introduction

Le comportement d'un matériau, et en particulier sa réponse à des sollicitations au sein d'une structure, dépend étroitement de ses constituants, de leur distribution spatiale ainsi que des interfaces les séparant. Les méthodes d'homogénéisation ont pour objectif de prévoir ce comportement macroscopique, dit effectif, en se basant sur des techniques de changement d'échelle qui permettent de relier les propriétés microscopiques du matériau à ses propriétés macroscopiques. Afin d'évaluer le comportement effectif d'un matériau hétérogène par des méthodes d'homogénéisation, il existe dans la littérature deux approches possibles.

La première approche consiste à déterminer les propriétés effectives en utilisant les méthodes de l'homogénéisation en champs moyens. Ces méthodes sont explicitées dans de nombreux ouvrages et articles de review dont entre autre [60, 56, 42, 47, 4]. Elles ont atteint aujourd'hui un haut niveau d'efficacité, particulièrement dans le cas des composites linéaires [59, 1, 10, 48, 6], mais aussi dans le cas des composites non linéaires : par exemple [59, 1, 10, 48, 6] pour les composites non linéaires élastiques ou visco-plastiques [38, 7, 35, 36, 37, 50, 13, 14], ou pour les composites à comportement héréditaire c'est à dire dépendant de l'histoire du chargement. Les méthodes de l'homogénéisation en champs moyens fournissent des bornes ou des estimations du comportement effectif. Généralement, des bornes peuvent être calculées quand on dispose d'informations statistiques sur la distribution des phases. Parmi ces informations, citons les moments d'ordre n de la fonction

caractéristique $\chi^r(x)$ qui sert à décrire la microstructure. Cette fonction vaut 1 si le vecteur de position x est dans la phase r et 0 sinon. Pour les matériaux hétérogènes aléatoires linéaires élastiques, qui sont les matériaux étudiés dans ce travail, les informations relatives aux premiers moments de $\chi^r(x)$ permettent de calculer les bornes du premier ordre de Voigt [57] et Reuss [49], du second ordre de Hashin et Shtrikman [24] ainsi que celles du troisième ordre de Beran [1]. Dans le cas où nous disposons plutôt d'informations qualitatives concernant la morphologie de la microstructure, telles que le rôle particulier de la phase matrice pour les composites de type matrice-inclusions ou bien l'influence égale de chaque phase au sein d'un composite granulaire, nous avons alors la possibilité d'obtenir directement des estimations des propriétés effectives telles que les estimations de Mori Tanaka [41] ou auto-cohérente [34]. Dans le cas où nous disposons d'informations portant à la fois sur la statistique de la distribution des phases ainsi que sur la morphologie du composite, nous pouvons utiliser des bornes ou des estimations très performantes telles que l'estimation de Ponte-Castaneda et Willis [48] ou les bornes et estimations issues de l'approche par motifs morphologiques représentatifs [55, 6].

Notons que toutes les approches issues de l'homogénéisation par champs moyens sont basées sur des composites aléatoires dont le VER est quasiment l'extension infinie. Par conséquent, ces approches fournissent des bornes et des estimations asymptotiques. De plus, les approches par champs moyens sont bien adaptées pour des microstructures plutôt simples que complexes. Dans le cas des microstructures complexes, ou quand des informations statistiques supérieures au troisième ordre sont disponibles, les simulations en champs complets constituent une alternative efficace pour évaluer le comportement effectif. Elles consistent à calculer le comportement apparent du composite associé à un chargement particulier pour différents VE de même taille et d'approcher le comportement effectif par la moyenne d'ensemble de ces comportements apparents. L'estimation du comportement effectif obtenue dépend de la taille des échantillons, de leur nombre, de la nature des conditions aux limites considérées, des paramètres matériaux et de la microstructure. La convergence de cette estimation vers le comportement effectif est obtenue quand la taille des échantillons tend vers la taille du VER, cette dernière dépendant à la fois de la propriété effective recherchée, des paramètres matériau tels que le contraste entre les phases, des fractions volumiques des phases, de leur distribution spatiale etc. . . et de façon cruciale de la précision souhaitée vis-à-vis de l'évolution des propriétés effectives. Par conséquent, afin d'obtenir une estimation précise du comportement effectif, il est essentiel d'évaluer la taille du VER associée à une propriété mécanique ou physique particulière pour un matériau donné. Par ailleurs, la taille du VER

peut être très grande entraînant ainsi des coûts de calcul conséquents quand on cherche à évaluer le comportement effectif à partir d'échantillons de la taille du VER. Pour de tels matériaux, nous avons besoin de disposer de critères rigoureux capables d'évaluer l'écart entre les moyennes d'ensemble du comportement apparent censées estimer le comportement effectif du matériau étudié et le comportement effectif lui-même quand les simulations numériques sont effectuées sur des échantillons de tailles inférieures à celle du VER. Ce problème a tout d'abord été abordé par Huet [31] et plus tard par Sab [52]. En utilisant différents arguments, ces deux auteurs ont montré que la moyenne arithmétique du tenseur des raideurs associé à des conditions aux limites en déplacements affines (CLDA) et l'inverse de la moyenne arithmétique du tenseur des souplesses associé à des conditions aux limites en contraintes homogènes (CLCH), pour des VE de forme carrée $2D$ ou cubique $3D$, de côté de longueur L , sont respectivement des bornes supérieure et inférieure du comportement effectif (équation (1.13)). Il est de plus démontré que la borne supérieure (resp. inférieure) décroît (resp. croît) en fonction de la taille adimensionnelle $\delta = L/d$ du VE. L'écart entre les deux bornes permet d'évaluer si ces moyennes d'ensemble du comportement apparent sont proches ou non du comportement effectif. Ostoja-Starjewski [43, 44], en appliquant cet encadrement au cas plan des matériaux composites de type matrice-disques à comportement linéaire élastique, a fourni de bonnes évaluations du comportement effectif pour des valeurs de δ relativement faibles dans le cas de faibles à moyens contrastes entre les constituants du composite. Pour les situations de forts contrastes entre les phases, tels que les composites renforcés par des inclusions rigides ou les matériaux poreux, les simulations numériques réalisées par Ostoja-Starjewski ont montré qu'un écart très important entre les deux bornes persistait même pour des grandes valeurs de δ . Par la suite, de nouvelles simulations effectuées par Jiang et al. [32] sur le même type de matériaux ont montré que la moyenne d'ensemble du comportement apparent associé à des conditions aux limites périodiques converge plus rapidement vers le comportement effectif que les moyennes d'ensemble des comportements apparents associés soit à des CLDA soit à des CLCH. Cette propriété a été utilisée par Kanit et al. [33] qui ont développé une méthode performante pour l'évaluation du comportement effectif basée sur les notions de portée intégrale et d'intervalle de confiance. Leur méthode permet de prévoir le nombre d'échantillons de taille δ nécessaires pour atteindre un niveau de précision donné pour la propriété effective recherchée et réciproquement de calculer la précision relative pour un nombre de simulations donné. Cependant, comme l'expliquent ces auteurs, la méthode est efficace uniquement dans le cas où la taille des échantillons est supérieure à la taille du VER associée à des CL périodiques. Cette taille de VER étant définie comme la taille au

delà de laquelle la valeur moyenne du comportement apparent d'un matériau donné, calculé pour des CL périodiques, n'évolue plus en fonction de la taille δ des échantillons de calcul.

L'objectif principal de ce travail consiste à fournir de nouvelles bornes plus efficaces du comportement effectif issues du comportement apparent comme l'on initié Huet [31] et Sab [52] tout en évitant les limitations mentionnées observées pour les CLDA ou CLCH, dans le cas des forts contrastes. L'origine de cette limitation, qui, rappelons-le, correspond à un écart significatif entre les deux bornes persistant même pour des grandes valeurs de δ , peut être expliquée par le fait que l'énergie de déformation due aux inclusions qui intersectent le bord du VE devient très importante quand des CLDA (resp. des CLCH) sont appliquées directement aux particules rigides (resp. aux pores). Dans le but de corriger cette défaillance, nous avons considéré des VE non-carrés ($2D$) ou non-cubiques ($3D$) construits à l'aide d'assemblages de cellules (tels que, par exemple, des assemblages de cellules de Voronoï), chaque cellule étant constituée d'une inclusion entourée d'une couche de matrice de manière à empêcher toute application directe des CL aux inclusions. Ces VE sont générés en étendant le schéma proposé par Danielson et al [12] pour les matériaux à microstructures aléatoires périodiques à des microstructures complètement aléatoires. En utilisant le théorème d'encadrement de Clayperon et des procédures de moyennisation appropriées, des bornes améliorées du comportement effectif sont obtenues à partir de moyennes d'ensemble des comportements apparents calculés sur des VE non-carrés (ou non-cubiques).

Le plan de ce chapitre est le suivant. Après avoir introduit au paragraphe 1.2 quelques notions préalables nous rappelons l'approche classique au paragraphe 1.3 de Huet pour calculer les bornes supérieure et inférieure du comportement effectif à partir de moyennes d'ensemble du comportement apparent. Puis nous présentons au paragraphe 1.4 une nouvelle procédure pour calculer les bornes améliorées du comportement effectif par extension de l'approche de Huet à des VE non-carrés (ou non cubiques) pour des composites aléatoires de type matrice-inclusions. Cette procédure est ensuite appliquée au paragraphe 1.5 au cas d'un composite biphasé composé d'une matrice renforcée (ou assouplie) par des fibres cylindriques identiques de même direction et distribuées aléatoirement dans le plan transverse. Les résultats obtenus sont comparés aux bornes classiques de Huet pour des contrastes allant du composite renforcé par des fibres rigides au matériau poreux et pour différentes fractions volumiques de fibres.

1.2 Quelques notions préalables

Rappelons qu'une des notions fondamentales à l'étude que nous menons est celle de volume élémentaire représentatif (VER) d'un matériau hétérogène, composé de constituants homogènes présentant des propriétés mécaniques et morphologiques différentes. Nous cherchons à construire un milieu homogène équivalent (MHE) fictif, produisant la même réponse mécanique que le VER une fois soumis aux mêmes sollicitations. Dans la pratique, la substitution du milieu hétérogène par un MHE consiste à établir des relations entre les réponses mécaniques au niveau des deux échelles considérées : l'échelle microscopique du matériau hétérogène et l'échelle macroscopique du MHE. Les relations ainsi élaborées serviront à calculer le comportement effectif du milieu hétérogène. Lorsque le VE n'est pas assez grand pour être représentatif de la statistique de la microstructure du matériau hétérogène, son comportement est dit apparent par opposition au comportement effectif du VER.

Pour calculer le comportement apparent ou/et effectif, nous procédons généralement en 3 étapes : la représentation du VER, la localisation et enfin l'étape d'homogénéisation [64]. L'étape de représentation vise à déterminer la constitution du VE du matériau hétérogène étudié, soit totalement pour les méthodes d'homogénéisation en champs complets, soit partiellement pour les méthodes d'homogénéisation en champs moyens. Nous noterons que l'existence d'un VE représentatif de la statistique de la microstructure du matériau est assurée quand la microstructure satisfait les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité. L'étape de localisation consiste à s'intéresser à la réponse mécanique locale du VE étudié pour des sollicitations macroscopiques données. Au cours de cette étape, nous déterminerons les champs locaux de déformations et de contraintes en tout point du VE, pour des CL données de type CLDA ou CLCH. La dernière étape consiste à revenir à l'échelle macroscopique en moyennant la réponse locale de l'étape précédente afin de construire les relations de passage entre les différentes échelles de l'étude. Il s'agit de l'étape d'homogénéisation. Nous déterminerons ainsi, pour des CLDA ou CLCH données, les propriétés apparentes du VE.

1.3 Bornes classiques du comportement effectif basées sur le comportement apparent

1.3.1 Définition du comportement apparent

Soit A un ensemble aléatoire caractérisé par un ensemble de champs stochastiques B tel que

$$B \in \left\{ \chi^r \in \{0, 1\}^{\mathbb{R}^d \times \Theta}, 1 \leq r \leq K : \sum_{r=1}^K \chi^r(x, \omega) = 1 \right\} \quad (1.1)$$

où K est le numéro de la phase, $d = 2$ ou 3 est la dimension de l'espace et, $\forall r \in \{1, \dots, K\}$, χ^r est une fonction caractéristique aléatoire, valant 1 si le vecteur position x est dans la phase r , et 0 sinon. Dans ce qui suit, par soucis de simplicité, toute microstructure aléatoire (e.g. A) sera identifiée à l'ensemble des fonctions caractéristiques qui le caractérise (i.e. B). De plus, l'ensemble aléatoire B sera supposé ergodique et stationnaire. A partir de l'espace aléatoire B , pour chaque $\omega \in \Theta$ nous obtenons une réalisation $B(\omega)$ du composite. On notera que dans le cas des composites biphasés, une seule fonction caractéristique, par exemple celle de la matrice χ^M , est nécessaire pour caractériser totalement la microstructure du composite. Afin de définir les VE carrés (en 2D) utilisés dans l'approche de Huet, nous introduisons des domaines de forme géométrique carrée $\Omega_{\delta, X}^s$ de centres $X = (x_1, x_2)$ et de longueur $L = \delta d$, définis par $\Omega_{\delta, X}^s = [x_1 - L/2, x_1 + L/2] \times [x_2 - L/2, x_2 + L/2]$. Un VE carré $B_{\delta, X}^s(\omega)$ du composite centré en X et de taille δ est ainsi caractérisé par la restriction de la réalisation du composite $B(\omega)$ au domaine carré $\Omega_{\delta, X}^s$, i.e. $B_{\delta, X}^s(\omega) \in \left\{ \chi^r(\omega) \in \{0, 1\}^{\Omega_{\delta, X}^s}, 1 \leq r \leq K : \sum_{r=1}^K \chi^r(\omega) = 1 \right\}$. La même notation est utilisée pour un VE cubique en considérant un centre X et un domaine cubique défini par $X = (x_1, x_2, x_3)$ et $\Omega_{\delta, X}^s = [x_1 - L/2, x_1 + L/2] \times [x_2 - L/2, x_2 + L/2] \times [x_3 - L/2, x_3 + L/2]$. On remarque que le volume $V_\delta = |\Omega_{\delta, X}^s| = (d\delta)^d$ d'un quelconque VE $B_{\delta, X}^s(\omega)$ est indépendant de la réalisation ω puisque les VE sont carrés ou cubiques. Dans la suite de ce manuscrit, la moyenne spatiale de tout champ aléatoire $A(x, \omega)$ indexé sur Ω_δ^s , tel que, par exemple, le champ de déformation local $\varepsilon(x, \omega)$ ou le champ de contrainte local $\sigma(x, \omega)$, sera noté $\langle A(\omega) \rangle_{\delta, X}^s$, avec, par définition

$$\langle A(\omega) \rangle_{\delta, X}^s = \frac{1}{V_\delta} \int_{\Omega_{\delta, X}^s} A(x, \omega) dx. \quad (1.2)$$

Dans ce qui suit, en raison de la stationnarité de l'ensemble aléatoire B , la dépendance spatiale relative aux centres X d'une fenêtre carrée ou cubique ne sera indiquée que si nécessaire. De plus, ∂A représentera le bord d'un ensemble A et $n(x)$ sa normale sortante.

Quand la taille du VE est inférieure à celle du VER, le comportement du composite à l'échelle mésoscopique, appelé comportement apparent et qui représente le comportement des réalisations $B_\delta^s(\omega)$ du composite, dépend à la fois de la réalisation ω et de la nature des CL appliquées à la frontière $\partial\Omega_\delta^s$. Dans le cas de l'élasticité linéaire, les comportements apparents associés à des CLDA - $u(x, \omega) = \bar{\varepsilon}.x$, $\forall x \in \partial\Omega_\delta^s$ - ou à des CLCH - $\sigma(x, \omega).n(x) = \bar{\sigma}.n(x)$, $\forall x \in \partial\Omega_\delta^s$ - sont décrits respectivement par les tenseurs d'ordre 4 des modules $C_\delta^{s,d}(\omega)$ et des souplesses $S_\delta^{s,t}(\omega)$ apparents, ces derniers étant définis par

$$V_\delta \bar{\varepsilon} : C_\delta^{s,d}(\omega) : \bar{\varepsilon} = \inf_{u \in K(\bar{\varepsilon})} \int_{\Omega_\delta^s} \varepsilon(u(x)) : C(x, \omega) : \varepsilon(u(x)) dV, \quad (1.3)$$

avec $K(\bar{\varepsilon}) = \{u(x) / u(x) = \bar{\varepsilon}.x \ \forall x \in \partial\Omega_\delta^s\},$

$$V_\delta \bar{\sigma} : S_\delta^{s,t}(\omega) : \bar{\sigma} = \inf_{\sigma \in S(\bar{\sigma})} \int_{\Omega_\delta^s} \sigma(x) : S(x, \omega) : \sigma(x) dV, \quad (1.4)$$

avec $S(\bar{\sigma}) = \{\sigma(x) / \operatorname{div}(\sigma(x)) = 0 \ \forall x \in \Omega_\delta^s; \ \sigma(x).n = \bar{\sigma}.n \ \forall x \in \partial\Omega_\delta^s\}.$

Dans les équations (1.3) et (1.4) et dans la suite du mémoire, les exposants d et t indiquent respectivement des CLDA et des CLCH. De plus, l'indice s en exposant est ajouté pour signaler le fait que les moyennes sont relatives à des domaines carrés (square) ou cubiques. Par ailleurs, $C(x, \omega)$ et $S(x, \omega)$ désignent respectivement les tenseurs des modules et des souplesses locaux associés à une réalisation ω du composite.

Les champs $u^d(x, \omega)$, $\varepsilon^d(x, \omega)$, $\sigma^d(x, \omega)$ (respectivement $u^t(x, \omega)$, $\varepsilon^t(x, \omega)$, $\sigma^t(x, \omega)$) solutions du problème variationnel (1.3) (respectivement (1.4)) sont aussi solutions du problème local suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(x, \omega)) = 0, \\ \sigma(x, \omega) = C(x, \omega) : \varepsilon(x, \omega), \\ \varepsilon(x, \omega) = \frac{1}{2} (\nabla u(x, \omega) + {}^T \nabla u(x, \omega)), \\ u(x, \omega) = \bar{\varepsilon}.x, \quad \text{pour des CLDA} \\ \sigma(x, \omega).n = \bar{\sigma}.n \quad \text{pour des CLCH} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \forall x \in \Omega_\delta^s \\ \forall x \in \partial\Omega_\delta^s \end{array} \quad (1.5)$$

Le tenseur des modules $C_\delta^d(\omega)$ et des souplesses $S_\delta^t(\omega)$ apparents satisfont également les relations suivantes

$$\bar{\sigma}_\delta^d(\omega) = C_\delta^{s,d}(\omega) : \bar{\varepsilon}, \quad \bar{\varepsilon}_\delta^t(\omega) = S_\delta^{s,t}(\omega) : \bar{\sigma}, \quad (1.6)$$

où $\bar{\sigma}_\delta^d(\omega)$ et $\bar{\varepsilon}_\delta^t(\omega)$ correspondent aux valeurs moyennes sur V_δ des champs locaux $\sigma^d(x, \omega)$ et $\varepsilon^t(x, \omega)$ calculées selon (1.2). De plus, on a $\bar{\sigma}_\delta^t(\omega) = \bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}_\delta^d(\omega) = \bar{\varepsilon}$.

Dans le cas de matériaux ergodiques et stationnaires, on montre [45, 52] que

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} C_{\delta}^{s,d}(\omega) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} (S_{\delta}^{s,t}(\omega))^{-1} = C^{eff} = (S^{eff})^{-1}, \quad (1.7)$$

Ainsi, la définition du comportement effectif C^{eff} montre que ce dernier ne dépend ni des CL ni de la réalisation ω . Dans la pratique, l'équation (1.7) est vérifiée à une précision donnée pour des valeurs de δ supérieures à la valeur critique δ_{VER} définie comme étant la valeur du VER associée à la précision choisie. Tout au long de ce mémoire, l'homogénéité statistique et l'ergodicité du composite sont vérifiées.

1.3.2 Bornes des propriétés effectives

En vue d'obtenir des bornes du comportement effectif, le VE carré $B_{\delta}^s(\omega)$ est découpé en 4 VE de forme carrée $B_{\delta',X^i}^s(\omega)$ centrés aux points $X^i = X + (\pm L/4, \pm L/4)$ de même taille $\delta' = \delta/2$ et de volume $V_{\delta',X^i} = V_{\delta}/4$ de telle manière que $B_{\delta}^s(\omega) = \bigcup_{i=1}^4 B_{\delta',X^i}^s(\omega)$. En $3D$, la partition requiert 8 domaines mais la démonstration est donnée uniquement dans le cas $2D$ en raison de la similitude des équations, le raisonnement et les résultats étant les mêmes en $3D$ qu'en $2D$. A partir des solutions $u_{(i)}^d(x, \omega)$ des problèmes locaux (1.5) définis sur les sous-domaines $B_{\delta',X^i}^s(\omega)$ et associés à des CLDA, nous définissons un champ de déplacement virtuel $\tilde{u}^d(x, \omega)$ sur le domaine $B_{\delta}^s(\omega)$, cinématiquement admissible avec le problème (1.5) associé à des CLDA, tel que sa restriction à chaque sous-domaine $B_{\delta',X^i}^s(\omega)$ corresponde au champ $u_{(i)}^d(x, \omega)$, i.e. $\tilde{u}^d(x, \omega) = u_{(i)}^d(x, \omega)$, $\forall x \in \Omega_{\delta',X^i}^s(\omega)$. Quand on applique le principe de l'énergie potentielle au problème (1.5) doté de CLDA, on obtient

$$\int_{\Omega_{\delta}^s} \sigma^d(x, \omega) : \epsilon^d(x, \omega) dV \leq \int_{\Omega_{\delta}^s} \tilde{\sigma}^d(x, \omega) : \tilde{\epsilon}^d(x, \omega) dV \quad (1.8)$$

où $\tilde{\epsilon}^d(x, \omega)$ et $\tilde{\sigma}^d(x, \omega)$ sont les champs de déformations et de contraintes admissibles associés à $\tilde{u}^d(x, \omega)$. En appliquant le lemme de Hill aux deux termes de l'équation (1.8) et en se rappelant que $V_{\delta',X^i} = V_{\delta}/4$ on obtient

$$\langle \sigma^d(\omega) \rangle_{\delta,X}^s : \bar{\epsilon} \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \langle \tilde{\sigma}^d(\omega) \rangle_{\delta',X^i}^s : \bar{\epsilon}. \quad (1.9)$$

La définition (1.6)₁ du module apparent appliquée aux VE $B_{\delta}^s(\omega)$ et $B_{\delta',X^i}^s(\omega)$ conduit à

$$C_{\delta,X}^{s,d}(\omega) \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 C_{\delta',X^i}^{s,d}(\omega) \quad (1.10)$$

où la relation d'ordre $A \leq B$ entre deux tenseurs A et B doit être comprise au sens des formes quadratiques, i.e. $t : A : t \leq t : B : t$ pour tout tenseur d'ordre 2 $t \neq 0$. Etant donnée la stationnarité du matériau, on a $E(C_{\delta', X^i}^{s,d}) = E(C_{\delta/2}^{s,d})$, $\forall i = 1, \dots, 4$. Par conséquent $E(C_{\delta}^{s,d}) \leq E(C_{\delta'}^{s,d})$, $\forall \delta' = \delta/2$. Finalement, en utilisant l'équation (1.7), nous obtenons les bornes supérieures suivantes du comportement effectif

$$C^{eff} \leq E(C_{\delta}^d) \leq E(C_{\delta'}^d) \quad \forall \delta' = \delta/2. \quad (1.11)$$

En appliquant similairement le principe de l'énergie complémentaire au problème associé à des CLCH (1.5) (pour plus de détails voir [44]), on obtient une hiérarchie de bornes supérieures pour la souplesse effective sous la forme

$$S^{eff} \leq E(S_{\delta}^t) \leq E(S_{\delta'}^t) \quad \forall \delta' = \delta/2. \quad (1.12)$$

En combinant l'équation (1.11) avec (1.12), il s'en suit

$$(E(S_{\delta'}^t))^{-1} \leq (E(S_{\delta}^t))^{-1} \leq (S^{eff})^{-1} = C^{eff} \leq E(C_{\delta}^d) \leq E(C_{\delta'}^d) \quad \forall \delta' = \delta/2. \quad (1.13)$$

Pour obtenir (1.13), nous avons utilisé le résultat mathématique non trivial suivant : soient deux tenseur A et B du quatrième ordre inversibles $A \leq B \Leftrightarrow B^{-1} \leq A^{-1}$ au sens des formes quadratiques. La relation d'ordre (1.13) des bornes supérieure et inférieure du comportement effectif a été obtenue tout d'abord par Huet [31] et plus tard par Sab [52] d'une façon différente. Cette relation montre que l'écart entre les bornes inférieure et supérieure décroît en fonction de δ , jusqu'à tendre vers zéro pour des valeurs infinies de δ où la valeur du comportement effectif est atteinte. Nous notons par $C_{\delta}^{SC+} = (E(C_{\delta}^d))^{-1}$ et $C_{\delta}^{SC-} = (E(S_{\delta}^t))^{-1}$ les bornes calculées à partir des comportements apparents des VE de forme géométrique carrée que nous notons par SC (voir figure 1.1).

1.3.3 Limitations de l'approche classique

La relation (1.13) permet d'obtenir de bonnes évaluations des propriétés effectives dans le cas de faibles à moyens contrastes entre les phases [43]. En revanche, dans le cas de contrastes élevés - e.g., des particules rigides ou des pores - l'écart entre les bornes supérieure et inférieure demeure important même pour des grandes valeurs de δ . Une illustration de ce phénomène est fournie sur la figure 1.2 qui reporte l'évolution des bornes de Huet du module de compressibilité plane effectif en fonction de δ dans le cas, d'une part d'un composite renforcé de façon rigide et d'autre part d'un matériau poreux, les deux matériaux étant

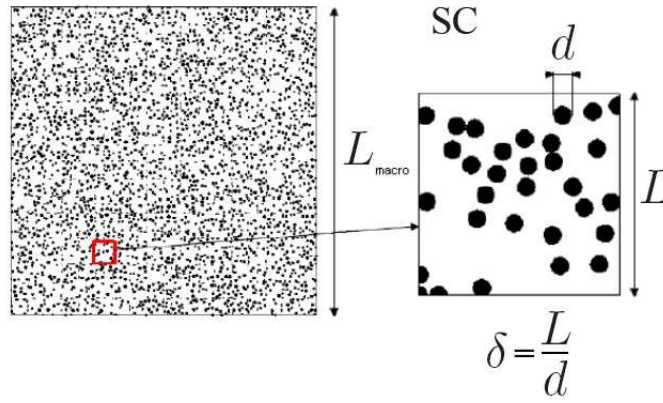


FIGURE 1.1 – Génération des VE à partir d’une grande microstructure : VE de type (SC)

constitués d’une matrice isotrope linéaire élastique et de fibres cylindriques identiques (rigides ou infiniment souples) et parallèles distribués de manière isotrope dans le plan transverse. Les calculs des comportements apparents ont été réalisés, selon les principes qui seront détaillés plus loin, avec le logiciel éléments finis Cast3M [9] couplé avec le logiciel de maillage Netgen [30]. Les moyennes d’ensemble ont été évaluées pour 2000 réalisations différentes de la microstructure pour $2 \leq \delta < 20$ et pour 1000 réalisations pour $\delta \geq 20$. Un comportement linéaire élastique isotrope a été attribué aux fibres de fraction volumique f^I de manière à ce que le contraste $c = k^I/k^M = \mu^I/\mu^M$ entre les phases soit égal à 10^4 dans le cas d’un composite renforcé par des fibres rigides et 10^{-4} dans le cas du matériau poreux où k^r et μ^r représentent les modules de compressibilité et de cisaillement de la phase r et les exposants I, M les phases inclusion et matrice. Par ailleurs, le comportement de la phase matrice satisfait $k^M = \mu^M$ (soit $\nu = 1/8$). Pour toutes les applications numériques réalisées dans ce mémoire, les résultats en termes de modules ou de contraintes sont donnés dans une échelle adimensionnelle pour laquelle $\mu^M = 1$.

Les absences de convergence pour la borne supérieure du composite renforcé par des fibres rigides et la borne inférieure du matériau poreux s’expliquent comme suit : la partie de l’énergie de déformation due aux particules qui intersectent le bord de la cellule devient très élevée dans le cas où des CLDA (cas du composite renforcé) ou des CLCH (cas du matériau poreux) sont directement appliquées respectivement aux fibres rigides ou aux pores. Par conséquent, en appliquant de telles CL irréalistes directement sur les particules rigides ou les pores qui intersectent le bord, les bornes obtenues par Huet [31] ou Sab [52] surestiment l’influence des CL sur le comportement apparent.

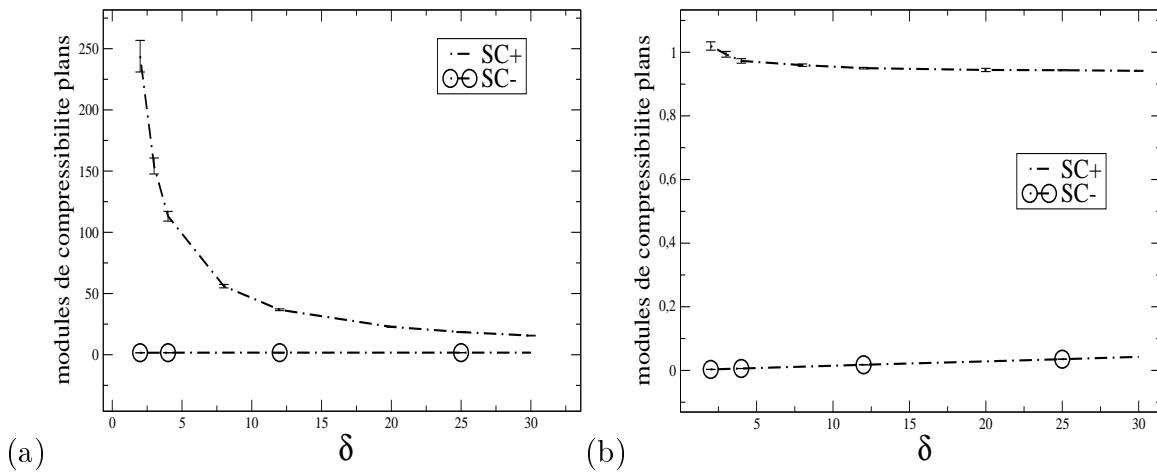


FIGURE 1.2 – Evolution des bornes supérieure (SC+) et inférieure (SC-) de type Huet du module de compressibilité plan en fonction de δ pour le composite renforcé ($c = 10^4$) de type matrice-inclusions (a) et le matériau poreux ($c = 10^{-4}$) (b)

Par ailleurs, l'évolution en fonction de δ de la borne supérieure du composite renforcé par des fibres rigides (figure 1.2a) aurait pu être prévue par un modèle simplifié construit de la façon suivante. Afin de calculer la partie de l'énergie de déformation due aux particules qui intersectent le bord d'une cellule carrée de taille L , le VE $B_\delta(\omega)$ est scindé en deux parties comme le montre la figure 1.3. La première partie $B_\delta^1(\omega)$, de domaine $\Omega_\delta^{(1)}$ et de volume $V_\delta^{(1)} = 4d(L-d)$, est constituée d'une bande d'épaisseur d telles que toutes les inclusions qui intersectent le bord du VE soient incluses dans la partie $B_\delta^1(\omega)$ tandis que la seconde partie $B_\delta^2(\omega)$, de domaine $\Omega_\delta^{(2)}$ et de volume $V_\delta^{(2)} = L^2 - V_\delta^{(1)} = (L-2d)^2$, correspond au coeur du VE, à savoir un carré de taille $L-2d$. En partant de cette subdivision on a

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon} : C_\delta^d(\omega) : \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{V_\delta} \min_{u \in K^{(1)}(\bar{\varepsilon})} \int_{\Omega_\delta^{(1)}} \varepsilon(u(x)) : C(x, \omega) : \varepsilon(u(x)) \, dx \\
&= \frac{1}{V_\delta} \min_{u \in K^{(1)}(\bar{\varepsilon})} \int_{\Omega_\delta^{(1)}} \varepsilon(u(x)) : C(x, \omega) : \varepsilon(u(x)) \, dx \\
&\quad + \frac{1}{V_\delta} \min_{u \in K^{(2)}(\bar{\varepsilon})} \int_{\Omega_\delta^{(2)}} \varepsilon(u(x)) : C(x, \omega) : \varepsilon(u(x)) \, dx \\
&= \bar{\varepsilon} : \left(\frac{V_\delta^{(1)}}{V_\delta} C_\delta^{BL}(\omega) + \frac{V_\delta^{(2)}}{V_\delta} C_\delta^{app}(\omega) \right) : \bar{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

où les ensembles des champs de déplacement cinématiquement admissibles $K^{(1)}(\bar{\varepsilon})$ et $K^{(2)}(\bar{\varepsilon})$ sont définis par

$$\begin{aligned}
K^{(1)}(\bar{\varepsilon}) &= \left\{ u(x) \mid u(x) = \bar{\varepsilon} \cdot x \, \forall x \in \partial\Omega_\delta^{(1, out)}; \, u(x) = u^d(x, \omega) \, \forall x \in \partial\Omega_\delta^{(1, int)} \right\}, \\
K^{(2)}(\bar{\varepsilon}) &= \left\{ u(x) \mid u(x) = u^d(x, \omega) \, \forall x \in \partial\Omega_\delta^{(2)} \right\}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Dans les définitions (1.15), le champs de déplacement $u^d(x, \omega)$ correspond à la solution du problème local (1.5) pour des CLDA. La frontière $\partial\Omega_\delta^{(1)}$ est divisée en deux parties disjointes $\partial\Omega_\delta^{(1)} = \partial\Omega_\delta^{(1,out)} \cup \partial\Omega_\delta^{(1,int)}(\omega)$ où $\partial\Omega_\delta^{(1,int)} = \partial\Omega_\delta^{(2)}$ et $\partial\Omega_\delta^{(1,out)} = \partial\Omega_\delta^s$ correspondent respectivement à ses frontières intérieure et extérieure. Les tenseurs $C_\delta^{BL}(\omega)$ et $C_\delta^{app}(\omega)$ définis en (1.14) peuvent être respectivement interprétés en tant que tenseurs des rigidités apparentes de la couche frontière $B_\delta^1(\omega)$ et du coeur $B_\delta^2(\omega)$ du VE. En première approximation, nous admettons que la dépendance du comportement apparent de la couche frontière $B_\delta^1(\omega)$ par rapport à δ peut être négligée et que le module apparent du coeur, $C_\delta^{app}(\omega)$, peut être majoré par une modélisation qui ne surévalue pas artificiellement la sensibilité aux CL telle que par exemple celle qui sera introduite dans la partie 1.4 de ce chapitre et qui aboutit à une estimation du tenseur des rigidités apparentes noté $(C_\delta^{VOR+}(\omega))$. Partant de (1.14), le comportement apparent $C_\delta^d(\omega)$ du VE $B_\delta(\omega)$ pour des CLDA est majoré par

$$C_\delta^{s,d}(\omega) \simeq C_\delta^{VOR+}(\omega) + \frac{4}{\delta} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) (C^{BL}(\omega) - C_\delta^{VOR+}(\omega)) \quad (1.16)$$

Par conséquent

$$C^{eff} \leq E(C_\delta^{s,d}) \simeq E(C_\delta^{VOR+}) + \frac{4}{\delta} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) (E(C^{BL}) - E(C_\delta^{VOR+})). \quad (1.17)$$

Si, de plus, nous admettons que la contribution de la couche frontière dans le comportement apparent est prédominante, i.e. $\forall \delta, C^{BL}(\omega) \gg C_\delta^{VOR+}(\omega)$ et $E(C_\delta^{VOR+}) - C^{eff} \ll E(C^{BL}) (1/\delta - 1/\delta^2)$, on obtient

$$C^{eff} \leq C_\delta^{Ab} = C^{(1)} + \frac{4}{\delta} \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) C^{(2)}, \quad \text{avec} \quad C^{(1)} = E(C_{\delta=\infty}^{VOR+}) = C^{eff}, \quad C^{(2)} \simeq E(C^{BL}). \quad (1.18)$$

Quand on fait correspondre numériquement en la valeur $\delta = 30$ les deux courbes suivantes : le module de compressibilité plan $K_\delta^{Ab} = K^{(1)} + \frac{4}{\delta} (1 - \frac{1}{\delta}) K^{(2)}$ de la borne approchée (Ab pour approximated bound) C_δ^{Ab} et celui de la borne supérieure de type Huet K_δ^{SC+} du module de compressibilité effectif on obtient la constante $K^{(2)} = E(K^{BL})$ et donc l'évolution complète de K_δ^{Ab} en fonction de δ sachant que la constante $K^1 = K^{eff}$ est fournie par $K_{\delta=30}^{VOR+}$. Sur la figure 1.4 qui reporte les variations de K_δ^{Ab} et K_δ^{SC+} en fonction de δ une fois K_2 obtenu, on peut constater que K_δ^{Ab} reproduit de façon acceptable l'évolution de la borne supérieure de type Huet K_δ^{SC+} , montrant ainsi que l'évolution de K_δ^{SC+} pour un matériau renforcé de manière rigide, est principalement due à la contribution prédominante de la bande frontière dans le comportement apparent quand des CLDA sont appliquées. Notons bien que le modèle simplifié défini par l'équation (1.18) ne doit pas être interprété en tant

que modélisation rigoureuse mais plutôt en tant qu'approche simplifiée « avec les mains » visant à montrer de façon simple que la contribution de la couche frontière $B_\delta^1(\omega)$ prédomine dans l'évolution de C_δ^{SC+} en fonction de δ . L'écart entre la borne supérieure K_δ^{SC+} et la borne approchée K_δ^{Ab} pour de faibles valeurs de δ est probablement dû à l'approximation assez grossière par laquelle nous avons considéré que le comportement apparent de la couche frontière ne dépendait pas de δ . Enfin, comme le montre la figure 1.4, on remarque que l'évolution de la borne supérieure K_δ^{SC+} en fonction de δ est en parfaite adéquation avec la courbe $K^3/\delta + K^{eff}$, la constante K^3 étant calculée numériquement à partir de K_δ^{SC+} en faisant correspondre les deux courbes en $\delta = 30$.

Pour le comportement déviatorique plan, en raison de la symétrie cubique de la borne supérieure de Huet générée par la forme carrée des VE, l'approche simplifiée décrite par l'équation (1.18) doit être légèrement modifiée afin de pouvoir décrire entièrement l'évolution de la borne C_δ^{SC+} . Cependant, le point clé de la méthode modifiée tient toujours au fait que « l'explosion » et la non convergence des modules déviatoriques plans est causée par l'application directe de CLDA sur les particules qui intersectent les bords des cellules. Par soucis de clarté, l'approche modifiée sera décrite plus loin dans la partie 1.6 consacrée aux spécificités induites par la forme carrée des VE.

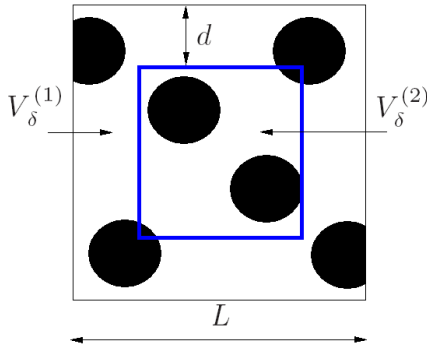


FIGURE 1.3 – subdivision d'un VE carré associé à la borne de type Voigt K_δ^{Ab}

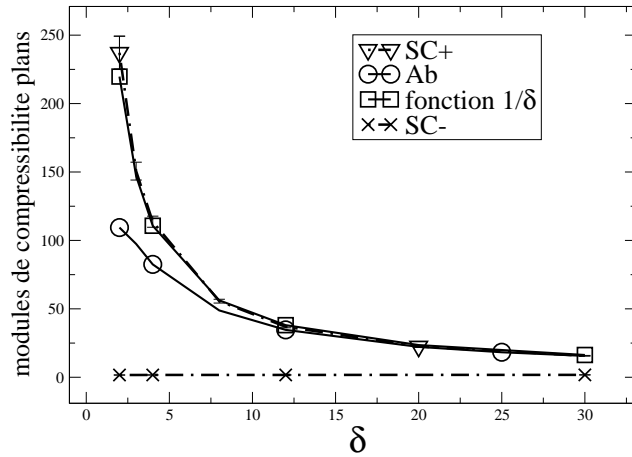


FIGURE 1.4 – Composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$, $f = 15\%$) : Évolution des bornes de type Huet ($SC+$, $SC-$) et de type Voigt (Ab) du module de compressibilité plan en fonction de δ

Enfin, lors des applications numériques, nous avons aussi essayé d'estimer le compor-

tement apparent de la couche frontière $B_\delta^1(\omega)$ à l'aide de la borne de Voigt i.e. $C^{BL} = f^I C^I + (1 - f^I) C^M$. Nous avons trouvé que l'utilisation de la borne de Voigt pour évaluer $C^{BL}(\omega)$ conduit à une borne approchée C_δ^{Ab} qui surestime légèrement la borne supérieure C_δ^{SC+} . Cette surestimation est liée au fait que l'hypothèse sous jacente à la borne de Voigt qui considère que le champs local de déformation dans les particules quasi-rigides ($c = 10^4$) du bord est constant et égal à la déformation uniforme $\bar{\varepsilon}$ est trop forte et doit être relâchée. En effet, seulement une partie de chaque inclusion qui intersecte le bord du VE et quelques composantes $\varepsilon_{ij}(x)$ du tenseur des déformations locales sont uniformes et égales à $\bar{\varepsilon}_{ij}$.

1.4 Nouvelles bornes pour les composites de type matrice-inclusions

Afin d'éviter les limitations de l'approche de Huet mentionnées précédemment, notamment l'écart très significatif observé entre les bornes des propriétés effectives dans le cas de forts contrastes généré par une application directe des CL sur les particules, nous proposons dans cette partie une nouvelle procédure pour encadrer les propriétés effectives d'un composite aléatoire basée sur la construction de VE non-carrés (resp. non-cubiques) dont les bords n'intersectent jamais les particules.

1.4.1 Nouvelle construction de Volume Élémentaire

Afin de pouvoir générer des VE sur lesquels il soit impossible d'appliquer des CL directement sur les inclusions, les composites considérés dans cette étude sont du type matrice-inclusions. On supposera de plus qu'il n'y a pas contact entre les inclusions mais ces dernières peuvent être de forme et de taille quelconque. Les nouveaux VE notés $B_\delta(\omega)$ (sans s), sont constitués d'un assemblage de cellules élémentaires, chaque cellule élémentaire étant composée d'une unique inclusion entourée de matrice. Pour construire de tels VE, nous extrayons de la microstructure une fenêtre carrée suffisamment grande pour qu'elle soit représentative de la microstructure (figure 1.5) et nous générons une partition (e.g. une partition de Voronoï) de cette microstructure en M cellules élémentaires, où M est le nombre d'inclusions de cette grande fenêtre carrée. Ensuite, n fenêtres carrées qui ne se recouvrent pas (n étant le nombre de réalisations) de taille δ sont extraites de cette très grande fenêtre et utilisées afin de générer n VE non-carrés construits à partir des cellules élémentaires dont

les centres appartiennent à la même fenêtre de taille δ , le centre de chaque cellule étant défini comme étant le centre de gravité de l'inclusion qu'elle contient. Une façon classique de générer de telles cellules élémentaires consiste à réaliser une partition du VER (la fenêtre de très grande taille) en M cellules de Voronoï, chaque cellule étant ainsi composée d'une seule inclusion entourée de matrice (figure 1.5). Cette façon de générer des VE non-carrés en se basant sur une partition en cellules de Voronoï peut être interprétée comme une extension du schéma proposé par Danielson et al [12] des microstructures aléatoires périodiques à des microstructures complètement aléatoires. La partition de Voronoï est bien adaptée au cas des microstructures de type matrice-inclusions pour lesquelles les inclusions sont de même taille et de même forme, comme c'est le cas des microstructures considérées dans cette étude. Cependant, pour des inclusions représentant des tailles et des formes différentes, une partition plus générale doit être considérée. Un exemple d'une telle partition peut être obtenu à partir de la distance $d(x, I_i)$ entre un point x appartenant au VER et une inclusion i ($i = 1, \dots, M$) de domaine I_i défini par $d(x, I_i) = \min_{y \in I_i} d(x, y)$ où $d(x, y)$ est la distance euclidienne entre deux points x, y . La cellule élémentaire i est ainsi définie (comme c'est le cas dans Bilger et al [2]) par l'ensemble $\Omega_i = \{x \in VER, \forall j \neq i, d(x, I_i) \leq d(x, I_j)\}$, caractérisant ainsi totalement la partition.

Un autre exemple de partition qui est bien adapté au cas des microstructures de type matrice-inclusions dont les tailles et/ou les formes des inclusions sont différentes est fourni par la description à l'aide de Motifs Morphologiques Représentatifs de la microstructure du matériau développé par Stolz et Zaoui [55] et Bornert et al [6]. Dans cette approche, le milieu hétérogène est décrit comme un ensemble de sous-domaines disjoints recouvrant entièrement tout le VER. On suppose que ces sous domaines peuvent être regroupés en des familles ayant des géométries et des propriétés mécaniques identiques. Ces familles sont appelées "Motifs Morphologiques Représentatifs" (MMR). La façon de définir précisément un MMR est expliquée dans Bornert et al [6]. Un exemple de motif peut être une particule de taille et de forme données entourée d'une couche de matrice (plusieurs façons de définir le contour extérieur sont possibles [6]). L'Assemblage de Sphère Composite de Hashin Classique (CSA) [21] est un exemple de fragmentation par MMR d'une microstructure théorique constituée de sphères composites (chaque sphère composite étant composée d'une inclusion sphérique recouverte d'une couche de matière sphérique) de tailles différentes mais de fractions volumiques d'inclusions identiques, tel que l'union de tous les motifs, i.e. les inclusions composites, recouvre tout le VER.

Un exemple de VE générés par la méthode décrite ci-dessus, associé à une partition de Voronoï de la microstructure d'un composite de type matrice-inclusions constitué de fibres longues cylindriques de mêmes tailles et parallèles, distribuées aléatoirement dans le plan transverse est représenté sur la figure 1.5. En 3D, les VE non-cubiques peuvent être obtenus en adoptant la même méthodologie. Etant donné que les résultats obtenus en 2D restent valables en 3D quand les comportements apparents sont associés à des VE non cubiques, nous nous limiterons dans tout le reste du mémoire, par souci de simplicité, aux seuls résultats et démonstrations correspondant au cas 2D.

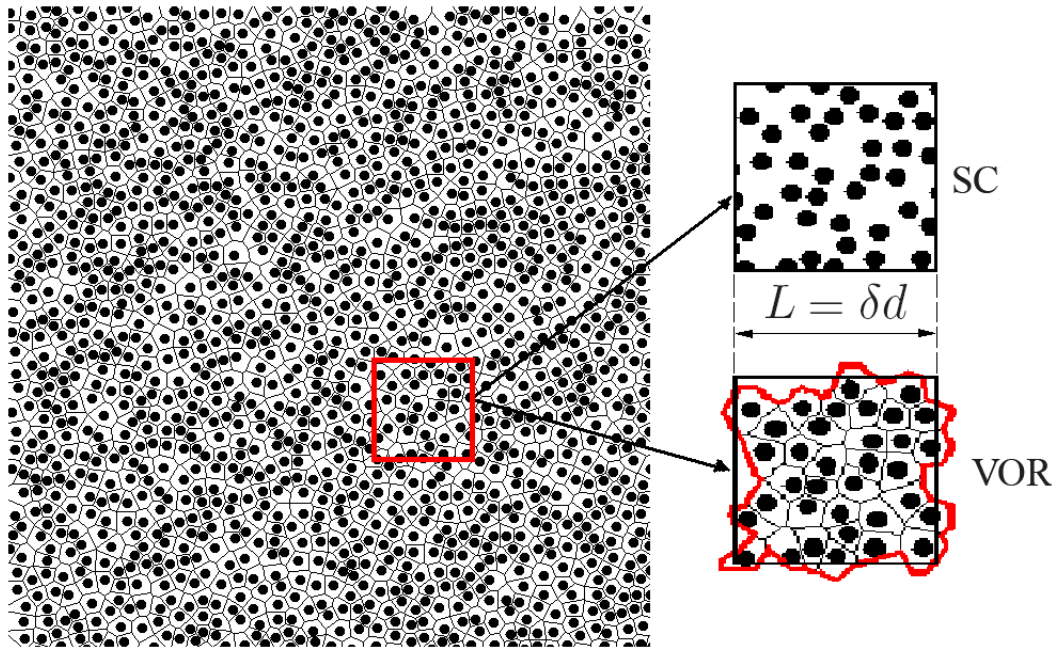


FIGURE 1.5 – Extraction d'un VE issu d'une décomposition en cellules de Voronoï

1.4.2 Nouvelles bornes

Les VE non-carrés $B_\delta(\omega)$ utilisés dans toute la suite du mémoire ont été obtenus par la méthodologie décrite dans la partie précédente. L'exposant s introduit précédemment pour mettre en évidence la forme carrée des VE est donc supprimé pour les nouveaux VE. Pour construire les nouvelles bornes, le point clé consiste à remarquer que la forme $\partial\Omega_\delta(\omega)$ et le volume $V_\delta(\omega)$ des VE non-carrés $B_\delta(\omega)$ dépendent désormais de la réalisation ω . En conséquence, toutes les définitions introduites dans la partie 1.3.1 pour des volumes V_δ et bords ∂B_δ^s déterministes associées aux VE carrés peuvent être étendues à des volumes $V_\delta(\omega)$

et des bords $\partial\Omega_\delta(\omega)$ qui sont des variables aléatoires. Plus précisément, les comportements apparents associés à des CLDA ou CLCH sont définis par

$$V_\delta(\omega) \bar{\varepsilon} : C_\delta^d(\omega) : \bar{\varepsilon} = \inf_{u \in K(\bar{\varepsilon}, \omega)} \int_{\Omega_\delta(\omega)} \varepsilon(u(x)) : C(x, \omega) : \varepsilon(u(x)) \, dV, \quad (1.19)$$

avec $K(\bar{\varepsilon}, \omega) = \{u(x) \mid u(x) = \bar{\varepsilon} \cdot x \, \forall x \in \partial\Omega_\delta(\omega)\},$

$$V_\delta(\omega) \bar{\sigma} : S_\delta^t(\omega) : \bar{\sigma} = \inf_{\sigma \in S(\bar{\sigma}, \omega)} \int_{\Omega_\delta(\omega)} \sigma(x) : S(x, \omega) : \sigma(x) \, dV, \quad (1.20)$$

avec $S(\bar{\sigma}, \omega) = \{\sigma(x) \mid \operatorname{div}(\sigma(x)) = 0 \, \forall x \in \Omega_\delta(\omega); \sigma(x) \cdot n = \bar{\sigma} \cdot n \, \forall x \in \partial\Omega_\delta(\omega)\}.$

En reprenant l'approche de Huet que l'on applique désormais à des VE non-carrés $B_\delta(\omega)$ nous obtenons de nouvelles bornes du comportement effectif :

$$\forall \delta \in \mathcal{R}^+, \, \forall \delta' = \delta/2,$$

$$\begin{aligned} E \left(\frac{V_{\delta'}}{E(V_{\delta'})} S_{\delta'}^t \right)^{-1} &\leq E \left(\frac{V_\delta}{E(V_\delta)} S_\delta^t \right)^{-1} \leq (S^{eff})^{-1} = C^{eff} \leq \\ E \left(\frac{V_\delta}{E(V_\delta)} C_\delta^d \right) &\leq E \left(\frac{V_{\delta'}}{E(V_{\delta'})} C_{\delta'}^d \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Démonstration de (1.21) : Par souci de simplicité, la démonstration de l'équation (1.21) est donnée uniquement pour une partition de Voronoï de la microstructure sachant qu'elle reste valable dans le cas de partitions plus générales telles que celles décrites dans la partie 1.4.1. Similairement à l'approche de Huet, le VE $B_\delta(\omega)$ de taille δ est scindé en 4 sous domaines $B_{\delta', X^i}(\omega)$ de taille $\delta' = \delta/2$ et de volume $V_{\delta', X^i}(\omega)$ tel que $B_\delta(\omega) = \bigcup_{i=1}^4 B_{\delta', X^i}(\omega)$. Les VE $B_{\delta', X^i}(\omega)$ sont construits de la même manière que $B_\delta(\omega)$, i.e. par assemblage de cellules de Voronoï de la microstructure $B(\omega)$ dont les centres appartiennent au domaine carré Ω_{δ', X^i}^s de taille δ' . Comme le montre la figure 1.5, les VE $B_\delta(\omega)$ (ainsi que $B_{\delta', X^i}(\omega)$) ne sont pas de forme carrée et aucune particule n'intersecte leur bord. A partir des solutions $u_{(i)}^d(x, \omega)$ des problèmes locaux (1.5) définis maintenant sur les sous domaines non-carrés $\Omega_{\delta', X^i}(\omega)$ et associés à des CLDA, un champ de déplacement virtuel $\tilde{u}^d(x, \omega)$ défini sur le domaine $\Omega_{\delta, X}(\omega)$ cinématiquement admissible avec le problème (1.5) associé à des CLDA est construit de telle sorte que sa restriction à chaque sous domaine $\Omega_{\delta', X^i}(\omega)$ corresponde aux champs $u_{(i)}^d(x, \omega)$, i.e. $\tilde{u}^d(x, \omega) = u_{(i)}^d(x, \omega), \, \forall x \in B_{\delta', X^i}(\omega)$. Le théorème de l'énergie potentielle associé au problème (1.5) défini sur $\Omega_{\delta, X}(\omega)$ pour des CLDA et appliqué à $\tilde{u}^d(x, \omega)$ conduit à l'équation (1.8) où $\Omega_{\delta, X}^s(\omega)$ est remplacé par $\Omega_{\delta, X}(\omega)$. En appliquant le lemme de Hill aux deux côtés de la relation (1.8) et en utilisant la définition (1.19) du comportement

apparent appliquées aux VE $B_\delta(\omega)$ et $B_{\delta,X^i}(\omega)$ on obtient

$$V_{\delta,X}(\omega)C_\delta^d(\omega) \leq \sum_{i=1}^4 V_{\delta',X^i}(\omega)C_{\delta',X^i}^d(\omega). \quad (1.22)$$

Etant donnée la stationnarité du matériau,

$$E(V_{\delta',X^i}C_{\delta',X^i}^d) = E(V_{\delta'}C_{\delta'}^d), \quad E(V_{\delta',X^i}) = E(V_{\delta'}) = E(V_\delta)/4 = E(V_{\delta,X})/4 \quad \forall i = 1, \dots, 4. \quad (1.23)$$

En moyennant l'inégalité (1.22) et en utilisant les relations (1.23) nous obtenons

$$\frac{E(V_\delta C_\delta^d)}{E(V_\delta)} \leq \frac{E(V_{\delta'}C_{\delta'}^d)}{E(V_{\delta'})} \quad \forall \delta' = \delta/2. \quad (1.24)$$

Etant donné que l'équation (1.7) implique

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{E(V_\delta C_\delta^d)}{E(V_\delta)} = \frac{E(V_{\delta \rightarrow \infty} C^{eff})}{E(V_{\delta \rightarrow \infty})} = C^{eff}, \quad (1.25)$$

on obtient

$$C^{eff} \leq \frac{E(V_\delta C_\delta^d)}{E(V_\delta)} \leq \frac{E(V_{\delta'}C_{\delta'}^d)}{E(V_{\delta'})} \quad \forall \delta' = \delta/2. \quad (1.26)$$

A partir du même raisonnement, mais cette fois-ci en utilisant le théorème de l'énergie complémentaire appliqué au problème (1.5) défini désormais pour des CLCH sur $B_\delta(\omega)$, une nouvelle hiérarchie de bornes supérieures de la souplesse effective est obtenue et s'écrit

$$S^{eff} \leq \frac{E(V_\delta S_\delta^t)}{E(V_\delta)} \leq \frac{E(V_{\delta'} S_{\delta'}^t)}{E(V_{\delta'})} \quad \forall \delta' = \delta/2. \quad (1.27)$$

La démonstration de l'équation (1.27) est fournie en Annexe C. La combinaison des équations (1.26) avec (1.27) conduit à (1.21), achevant ainsi la démonstration.

Dans la suite de ce mémoire, afin de simplifier les notations, nous utiliserons les notations suivantes

$$\begin{aligned} C_\delta^{VOR+} &= E\left(\frac{V_\delta}{E(V_\delta)} C_\delta^d\right), & C_\delta^{VOR-} &= E\left(\frac{V_\delta}{E(V_\delta)} S_\delta^t\right)^{-1}, \\ C_\delta^{SC+} &= E\left(C_\delta^{s,d}\right), & C_\delta^{SC-} &= E\left(S_\delta^{s,t}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.28)$$

pour les bornes supérieure et inférieure de type Voronoï C_δ^{VOR+} et Huet C_δ^{SC+} .

1.4.3 Description du processus aléatoire

Les moyennes d'ensemble utilisées dans le nouveau théorème d'encadrement (1.21) diffèrent de celles employées dans le calcul des bornes de type Huet (1.13) avec la pondération

$\frac{V_\delta(\omega)}{E(V_\delta)}$ qui est attribuée à $C_\delta^d(\omega)$ (resp. $S_\delta^t(\omega)$). Afin d'estimer leur moyenne d'ensemble, nous utilisons la méthodologie suivante. Comme nous l'avons décrit dans la partie 1.4.1, à partir de la grande microstructure $B(\omega)$ nous extrayons n VE $B_{\delta,X^i}(\omega)$ ($i = 1 \dots n$) constitué chacun d'un assemblage de cellules de Voronoï dont les centres appartiennent à la cellule carrée correspondante de taille δ et de centre X^i . En se basant sur la propriété d'ergodicité, chaque VE $B_{\delta,X^i}(\omega)$ peut être interprété comme étant une réalisation $B_{\delta,X}(\omega_i)$ de la microstructure de taille δ et de centre X , cette dernière étant définie comme la restriction de la ω_i -réalisation $B(\omega_i)$ du composite au domaine $\Omega_{\delta,X}(\omega_i)$, i.e. $B_{\delta,X}(\omega_i) \equiv B_{\delta,X^i}(\omega)$. En raison de la propriété de stationnarité, pour simplifier les notations, la dépendance en X est supprimée. Si l'on considère n échantillons $((C_\delta^d(\omega_i), V_\delta(\omega_i)), \omega_i \in \Theta, 1 \leq i \leq n)$ du couple (C_δ^d, V_δ) , les moyennes d'ensemble dans l'équation (1.21) peuvent être évaluées par :

$$E_n \left(\frac{V_\delta C_\delta^d}{E_n(V_\delta)} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n V_\delta(\omega_i) C_\delta^d(\omega_i)}{\sum_{i=1}^n V_\delta(\omega_i)}, \quad (1.29)$$

où l'indice n signifie que l'espérance est calculée en utilisant n réalisations du couple (C_δ^d, V_δ) . Une seconde estimation probablement plus pertinente peut être obtenue en donnant une interprétation statistique aux poids $\frac{V_\delta(\omega)}{E(V_\delta)}$. Pour cela, nous repartons de la subdivision de la grande microstructure $B(\omega)$ en n VE $B_\delta(\omega_i)$ et nous considérons N points $x_I = x(\omega_I)$ (figure 1.7), $1 \leq I \leq N$, $\omega_I \in \Theta$, $N \gg n$, uniformément distribués sur $B(\omega)$. A chaque point $x_I = x(\omega_I)$ nous associons un module C_δ^d ou souplesse S_δ^t apparent. La moyenne $E(C_\delta^d)$ est alors estimée par :

$$E_N(C_\delta^d) = \frac{1}{N} \sum_{I=1}^N C_\delta^d(\omega_I) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\delta(\omega_i)} C_\delta^d(\omega_i)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\delta(\omega_i)} 1} = \frac{\sum_{i=1}^n n_\delta(\omega_i) C_\delta^d(\omega_i)}{\sum_{i=1}^n n_\delta(\omega_i)} \quad (1.30)$$

où $n_\delta(\omega_i)$ est le nombre de points $x_I = x(\omega_I)$ qui appartiennent au VE $B_\delta(\omega_i)$. Dans l'équation (1.30), nous avons utilisé le fait que $C_\delta^d(\omega_I) = C_\delta^d(\omega_i)$ pour chaque point $x_I = x(\omega_I)$ appartenant à $B_\delta(\omega_i)$. Comme les points x_I sont uniformément distribués sur $B(\omega)$, $n_\delta(\omega_i)$ est relié à $V_\delta(\omega_i)$ à travers une relation linéaire $n_\delta(\omega_i) = \rho V_\delta(\omega_i)$ où ρ est la densité volumique de nombre de points x_I , i.e. le nombre de points x_I qui appartiennent à un volume unitaire. Le scalaire ρ ne dépend ni de ω_i ni de δ car la distribution des points est uniforme. Par conséquent, l'équation (1.30) peut se réécrire sous la forme suivante

$$E_N(C_\delta^d) = \frac{1}{N} \sum_{I=1}^N C_\delta^d(\omega_I) = \frac{\sum_{i=1}^n V_\delta(\omega_i) C_\delta^d(\omega_i)}{\sum_{i=1}^n V_\delta(\omega_i)} = E_n \left(\frac{V_\delta C_\delta^d}{E_n(V_\delta)} \right), \quad (1.31)$$

L'équation (1.31) fournit ainsi une autre estimation de la moyenne d'ensemble intervenant dans l'équation (1.21). D'un point de vue théorique, cette deuxième approche est plus per-

tinante que la première car elle emploie des moyennes d'ensemble classiques donnant le même poids à chaque réalisation. Cependant, d'un point de vue pratique, les espérances, les écarts-types ainsi que les fonctions de distribution des variables aléatoires $C_\delta^d(\omega)$, $S_\delta^t(\omega)$ sont calculés en prenant en compte la pondération $\frac{V_\delta(\omega_i)}{E(V_\delta)}$ associée à chaque réalisation ω_i (figure 1.6). Pour simplifier les notations, les exposants N et n utilisés dans les équations (1.29), (1.30) et (1.31) seront supprimés.

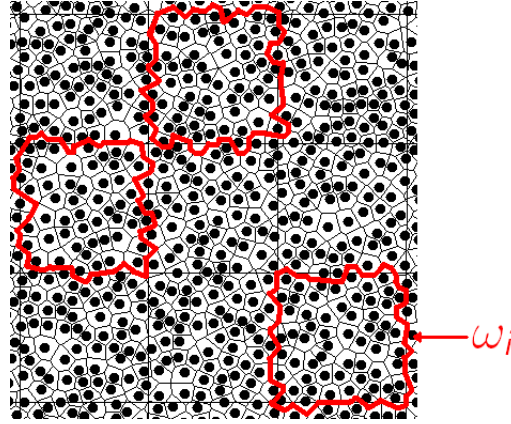


FIGURE 1.6 – Extraction des VE de type Voronoï à partir d'une grande réalisation de la microstructure

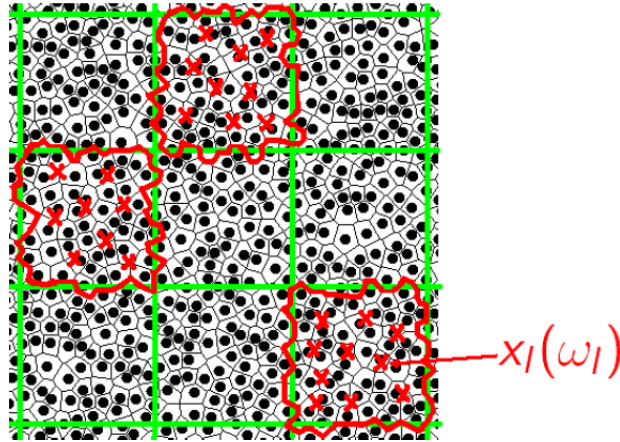


FIGURE 1.7 – Description du processus aléatoire

Afin de générer les n VE de calcul de même taille δ donnée nécessaires à l'estimation des espérances (1.29) ou (1.31), nous avons implicitement considéré (figures 1.6 et 1.7) une réalisation $B(\omega)$ du composite sur lequel nous avons superposé une grille de pas fixe $L = \delta d$ composée de n cellules de même taille L . La superposition de cette grille avec la réalisation

$B(\omega)$ du composite délimite les n VE $B(\omega_i)$ ($1 \leq \omega_i \leq n$) souhaités de même taille δ . Par la suite, les VE issus de cette procédure seront dénommés VE2.

Dans la pratique, nous n'avons pas procédé de cette manière. En effet, l'extraction des VE de calcul ne s'effectue pas à partir d'une grille fixe appliquée à la ω_i -réalisation $B(\omega_i)$ du composite. Cette extraction s'effectue en créant des centres X de fenêtre d'extraction aléatoirement selon un processus de poisson. Nous imposons de plus le non recouvrement des fenêtres d'extraction des VE de calcul afin de ne pas biaiser la statistique du comportement apparent. Cette procédure sera expliquée en détails dans la partie 1.5.3. Les VE issus de cette description statistique seront notés VE1 uniquement dans le cas où des comparaisons avec l'approche utilisant les VE2 sont effectuées. Dans toutes les autres situations (celles où il n'y a pas de VE2), on continuera à les noter simplement VE. On s'attend à ce que les processus stochastiques associés aux VE de type VE1 ou VE2 fournissent les mêmes résultats sur le comportement apparent. Cependant nous n'avons pas réussi à montrer ce résultat de façon théorique. En revanche nous l'avons vérifié numériquement en calculant les bornes du comportement effectif d'un composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$ et $f^I = 15\%$) au paragraphe 1.8.1. Suite à cette vérification numérique de l'équivalence entre les deux descriptions statistiques fournissant respectivement les VE1 et VE2, nous avons réalisé toutes les simulations à l'aide de l'approche VE1.

1.5 Application : Étude de la réponse transverse d'un composite à microstructure aléatoire

Le théorème d'encadrement (1.21) présenté dans la partie 1.4.2 est valable pour les composites de type matrice-inclusions aussi bien en dimension 2 qu'en dimension 3. Cependant, afin de réduire les coûts de calculs requis pour l'évaluation du comportement apparent de chaque réalisation, nous considérons comme première illustration de (1.21) l'étude de la réponse transverse d'un composite 3D élastique aléatoire composé d'une matrice renforcée par des fibres cylindriques parallèles et identiques, une étude qui peut être effectuée à l'aide de simulations numériques 2D peu coûteuses. Pour ce type de composites, il est possible de calculer les moyennes d'ensemble des comportements apparents en simulant au moins 1000 réalisations différentes pour chaque VE de taille δ , avec une puissance de calcul standard.

1.5.1 Description du matériau

Le matériau étudié est un composite biphasé constitué d'une matrice renforcée (ou assouplie) par des fibres cylindriques parallèles et identiques distribuées aléatoirement dans le plan transverse. Chaque phase suit la loi de Hooke. Tous les résultats relatifs à des contraintes sont donnés dans une échelle adimensionnelle pour laquelle le module de cisaillement de la matrice μ^M vaut 1. Le contraste entre les phases est défini de telle sorte que les modules de compressibilité et de cisaillement des inclusions et de la matrice valent $k^I = \mu^I = c$ et $k^M = \mu^M$, où les indices I et M représentent respectivement les phases inclusion et matrice. Grâce à l'invariance par rotation autour de l'axe des fibres e_3 d'une part des lois de comportement des phases et d'autre part de la statistique de leur distribution spatiale, le comportement effectif du composite linéaire est isotrope transverse. La même propriété reste valable pour les bornes supérieure et inférieure C_δ^{VOR+} obtenues dans (1.21). En effet, bien que chaque réalisation du comportement apparent $C_\delta^d(\omega)$, $S_\delta^t(\omega)$ ne soit pas isotrope transverse - car la distribution spatiale des fibres dans un VE de taille finie $B_\delta(\omega)$ n'est pas isotrope transverse pour $\delta \leq \delta_{VER}$ - leur moyenne d'ensemble est cependant isotrope transverse puisque le fait de moyenner sur tout l'espace des réalisations revient à moyenner sur toutes les orientations possibles de la microstructure des VE, conduisant ainsi à un comportement isotrope transverse. On remarque cependant, en examinant plus rigoureusement les symétries de notre problème, que les bornes de Voronoï dépendent de la géométrie des domaines carrés Ω_δ^s à partir desquels les cellules de Voronoï sont sélectionnées pour définir les VE. Néanmoins en pratique, cette anisotropie est si faible qu'elle peut être négligée. C'est en tous les cas ce que nous montrent sans ambiguïté les applications numériques. Dans la suite de ce mémoire, nous considérons donc les bornes de type Voronoï comme étant isotropes transverses.

Afin de simplifier les calculs, nous considérons uniquement la réponse transverse du composite. Le problème local à résoudre peut alors se réduire à un problème $2D$ en déformations planes pour lequel les fibres sont représentées par des disques de même diamètre d et les VE sont soumis à des chargements plans. Grâce à la propriété d'isotropie transverse du comportement effectif et de ses bornes de type Voronoï, leur comportement dans le plan est totalement caractérisé par ses modules de compressibilité et de cisaillement plans.

1.5.2 Génération de la microstructure

La microstructure du matériau est engendrée de la façon suivante. Les centres des disques sont générés aléatoirement selon un processus de poisson. Cependant, nous imposons de plus une distance de séparation minimale entre les disques de même diamètre d afin d'empêcher leur recouvrement et leur contact. Au cours de cette procédure, les disques sont introduits de manière séquentielle : Si le disque courant ne satisfait pas la condition de distance minimale requise, il est supprimé et un autre disque est de nouveau tiré au sort jusqu'à ce que la condition de distance minimale soit vérifiée. De nouveaux disques sont rajoutés jusqu'à ce que la fraction volumique requise soit atteinte sur le domaine de simulation. Comme le calcul des comportements apparents est réalisé dans cette étude par la méthode des éléments finis, une distance minimale entre les inclusions de $3.5\%d$ (modèle cherry pit ou noyau de cerise) a été imposée afin d'éviter les problèmes de maillage. Une telle restriction, due uniquement à la méthode des éléments finis, pourrait être supprimée en remplaçant la MEF par d'autres méthodes numériques permettant ainsi de traiter des microstructures dont les inclusions se recouvrent [61]. Il est bien connu qu'une telle façon de construire la microstructure - qui est une version légèrement modifiée de l'algorithme RSA (Random Sequential Adsorption) - n'est pas capable de traiter les cas où la fraction volumique des inclusions dans la matrice dépasse environ 35% en 2D. Pour créer des microstructures de type matrice-inclusions ayant des fractions volumiques plus importantes, il est nécessaire de recourir à des algorithmes plus sophistiqués tel que l'algorithme SA (Simulated Annealing) [51, 20]. De telles simulations feront l'objet de travaux ultérieurs. Le schéma 1.10 illustre l'algorithme de génération de la microstructure.

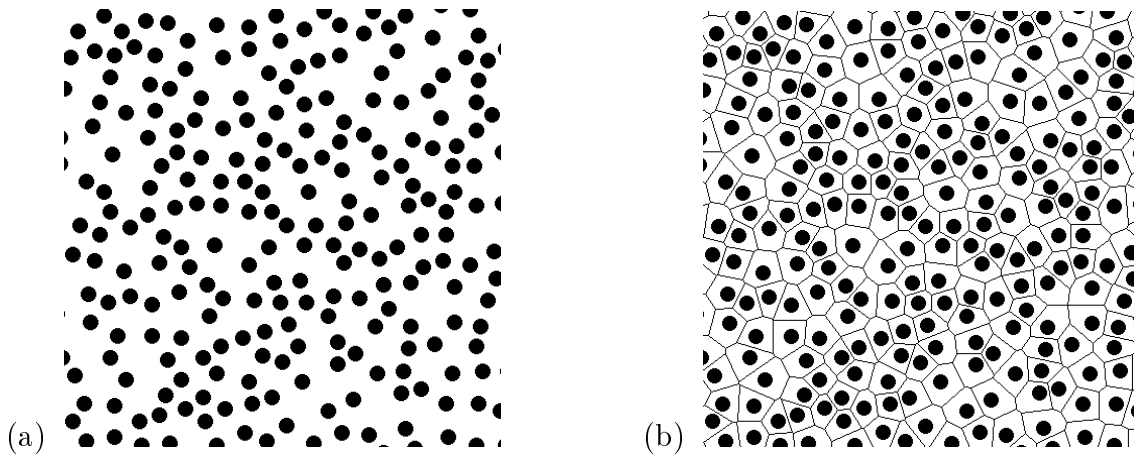


FIGURE 1.8 – Composite aléatoire (a) et répartition en cellules de Voronoï (b)

1.5.3 Partition en cellules de Voronoï et génération des VE non-carrés

A partir de la grande microstructure générée dans la section 1.5.2, une partition de Voronoï est réalisée à travers une commande du logiciel Matlab (figure 1.8). Ensuite, conformément à la partie 1.4.1, n fenêtres carrées de même taille δ sont extraites de cette partition et sont utilisées pour générer n VE non-carrés construits par assemblage des cellules de Voronoï élémentaires dont le centre appartient à la même fenêtre de taille δ (figure 1.9). Les n fenêtres carrées ayant la même taille δ sont extraites de manière séquentielle à travers un processus de Poisson fournissant les centres des fenêtres carrées. Dans le but d'éviter le recouvrement des fenêtres qui pourrait éventuellement entraîner un biais statistique, une distance minimale de $2\delta L$ entre les centres est imposée. De manière similaire à la création des centres des inclusions, si le centre du carré ne satisfait pas la condition de distance minimale requise, il n'est pas retenu et un nouveau est tiré au sort jusqu'à ce que la condition soit satisfaite. Idéalement, une seule grande microstructure est suffisante pour l'extraction de n fenêtres de même taille δ et génère n VE non-carrés. Cependant, le temps de calcul pour réaliser une partition en cellules de Voronoï avec Matlab semble suivre une croissance exponentielle en fonction de la taille de la microstructure, induisant ainsi des temps de calcul inacceptables dans le cas de très grandes microstructures. Dans la pratique, des grandes microstructures de taille 125δ sont générées. Pour chacune de ces microstructures, $m(\delta)$ fenêtres carrées sont extraites. Le paramètre $m(\delta)$ est ajusté numériquement pour chaque taille δ une fois pour toutes. Le nombre $M(\delta)$ des microstructures considérées pour la construction de n VE non-carrés est donné par $M(\delta) = \lfloor n/m(\delta) \rfloor + 1$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x . Ce processus est réalisé pour chaque taille δ considérée. Pour les applications numériques, $1000 \leq n \leq 2000$. La génération des microstructures et des VE non-carrés est assurée à travers des routines implémentées en C.

1.5.4 Calcul du comportement apparent

Problème local

Une fois les VE non-carrés $B_\delta(\omega)$ générés, les comportements apparents associés à des CLDA et des CLCH sont calculés. Nous nous intéressons uniquement à la réponse transverse du composite sous un chargement transverse. Le problème local à résoudre se restreint alors

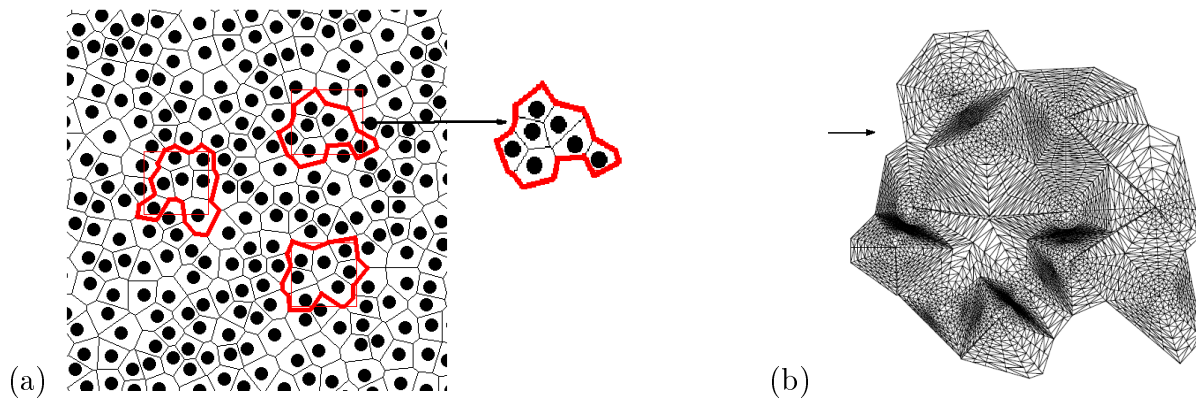


FIGURE 1.9 – Extraction d'un VE de calcul (a) et maillage du VE extrait (b)

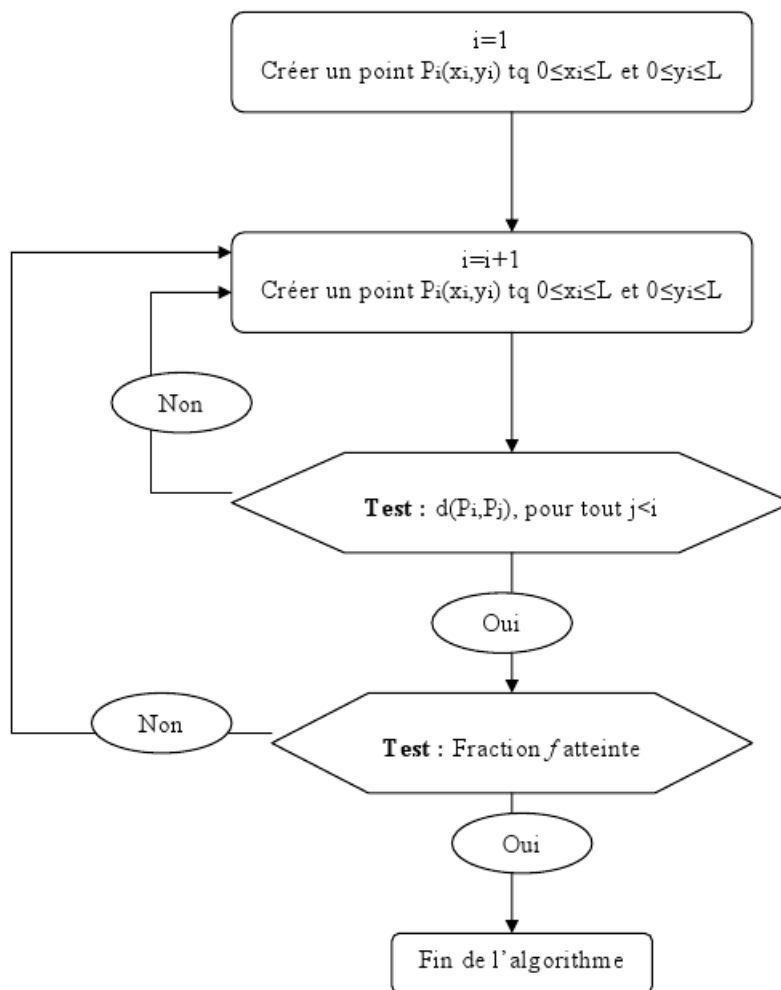


FIGURE 1.10 – Structure de l'algorithme de génération du milieu aléatoire

à un problème en 2D en déformations planes.

En déformations planes, les champs de tenseurs d'ordre 2 tels que ceux de déformations et de contraintes locales admettent la décomposition

$$\varepsilon = \varepsilon_m i + \varepsilon_{ps} e_{ps} + \varepsilon_{ss} e_{ss}, \quad \sigma = \sigma_m i + \sigma_{ps} e_{ps} + \sigma_{ss} e_{ss} \quad (1.32)$$

où les tenseurs d'ordre 2 i , e_{ps} et e_{ss} s'écrivent dans la base cartésienne considérée (e_3 étant l'axe d'isotropie transverse)

$$i = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2, \quad e_{ps} = e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2, \quad e_{ss} = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1. \quad (1.33)$$

Les scalaires ε_m , ε_{ps} , ε_{ss} (resp. σ_m , σ_{ps} , σ_{ss}) sont les composantes sphériques, de « cisaillement pur » et de « cisaillement simple » du champs de déformation (resp. du champ de contrainte).

Le problème local 2D à résoudre s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\sigma(x, \omega)) = 0, \\ \sigma_m(x, \omega) = 2K(x, \omega)\varepsilon_m(x, \omega), \quad \sigma^d(x, \omega) = 2\mu(x, \omega)\varepsilon^d(x, \omega), \\ \varepsilon(x, \omega) = \frac{1}{2} (\nabla u(x, \omega) + {}^T \nabla u(x, \omega)), \\ u(x, \omega) = \bar{\varepsilon} \cdot x, \quad \text{pour des CLDA} \\ \sigma(x, \omega) \cdot n = \bar{\sigma} \cdot n, \quad \text{pour des CLCH} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \forall x \in \Omega_\delta(\omega) \\ \forall x \in \partial\Omega_\delta(\omega) \end{array} \quad (1.34)$$

où

$$K(x, \omega) = \sum_{r=I, M} K^r \chi^r(x, \omega), \quad K^r = k^r + \mu^r/3, \quad \mu(x, \omega) = \sum_{r=I, M} \mu^r \chi^r(x, \omega). \quad (1.35)$$

Dans ces expressions, K^r est le module plan de compressibilité de la phase r , l'exposant d désigne la partie déviatorique des tenseurs de déformation et de contrainte (soit $\varepsilon^d = \varepsilon_{ps} e_{ps} + \varepsilon_{ss} e_{ss}$ et de même pour σ^d). Les déformation $\bar{\varepsilon}$ et contrainte $\bar{\sigma}$ macroscopiques sont des chargements plans de la forme (1.32).

Comportement apparent en déformations planes

Ainsi que nous l'avons expliqué dans la partie 1.5.1, les comportements apparents $C_\delta^d(\omega)$ et $S_\delta^t(\omega)$ ne sont pas isotropes transverses pour un VE de taille finie $\delta \leq \delta_{VER}$ mais pleinement anisotropes. Dans le cas de déformations planes, ces tenseurs s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} C_\delta^d(\omega) &= 2K_\delta^d(\omega)J_T + 2\lambda_\delta^d(\omega)E_{ps} + 2\mu_\delta^d(\omega)E_{ss} + 2\alpha_\delta^d(\omega)E_{m,ps}^s + 2\beta_\delta^d(\omega)E_{m,ss}^s + 2\gamma_\delta^d(\omega)E_{ps,ss}^s \\ S_\delta^t(\omega) &= \frac{1}{2K_\delta^t(\omega)}J_T + \frac{1}{2\lambda_\delta^t(\omega)}E_{ps} + \frac{1}{2\mu_\delta^t(\omega)}E_{ss} + \frac{1}{2\alpha_\delta^t(\omega)}E_{m,ps}^s + \frac{1}{2\beta_\delta^t(\omega)}E_{m,ss}^s + \frac{1}{2\gamma_\delta^t(\omega)}E_{ps,ss}^s \end{aligned} \quad (1.36)$$

où les tenseurs d'ordre 4 J_T , E_{ps} , E_{ss} , $E_{m,ps}^s$, $E_{m,ss}^s$, $E_{ps,ss}^s$ sont définis par

$$\begin{aligned} J_T &= \frac{1}{2} i \otimes i, & E_{ps} &= \frac{1}{2} e_{ps} \otimes e_{ps}, & E_{ss} &= \frac{1}{2} e_{ss} \otimes e_{ss}, & E_{m,ps}^s &= \frac{1}{2} (i \otimes e_{ps} + e_{ps} \otimes i), \\ E_{m,ss}^s &= \frac{1}{2} (i \otimes e_{ss} + e_{ss} \otimes i), & E_{ps,ss}^s &= \frac{1}{2} (e_{ps} \otimes e_{ss} + e_{ss} \otimes e_{ps}). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Le tenseur J_T est le tenseur projecteur sphérique dans le plan transverse. Les tenseurs E_{ps} , E_{ss} introduits par Willot et al [63] sont les projecteurs sur les sous-espaces des tenseurs déviatoriques du second ordre engendrés respectivement par e_{ps} et e_{ss} . Les tenseurs restant $E_{m,ps}^s$, $E_{m,ss}^s$, $E_{ps,ss}^s$ permettent d'intégrer au sein de la loi de comportement le couplage entre les composantes hydrostatiques, de cisaillement pur et de cisaillement simple, des champs de déformations et de contraintes. Ils sont introduits pour rendre compte d'une anisotropie quelconque en déformations planes. Les scalaires $K_\delta^{d,t}(\omega)$ sont les modules de compressibilité plans apparents pour des CLDA (d) et des CLCH (t) tandis que $\lambda_\delta^{d,t}(\omega)$, $\mu_\delta^{d,t}(\omega)$ sont respectivement les modules plans de cisaillement pur et de cisaillement simple. Les autres propriétés apparentes $\alpha_\delta^{d,t}(\omega)$, $\beta_\delta^{d,t}(\omega)$, $\gamma_\delta^{d,t}(\omega)$ caractérisent les relations entre les composantes hydrostatiques, de cisaillement pur et de cisaillement simple.

Les 6 composantes du tenseur des modules apparents $C_\delta^d(\omega)$ sont calculées pour chaque réalisation ω en résolvant le problème local (1.34) pour 3 CLDA différentes, i.e. $\bar{\varepsilon} = i$, $\bar{\varepsilon} = e_{ps}$ et $\bar{\varepsilon} = e_{ss}$, fournissant ainsi les quantités requises en moyennant les contraintes locales sur tout le VE $B_\delta(\omega)$ pour chaque chargement. Les composantes de $S_\delta^t(\omega)$ sont calculées de la même manière en résolvant pour 3 CLCH planes différentes, i.e. $\bar{\sigma} = i$, $\bar{\sigma} = e_{ps}$ et $\bar{\sigma} = e_{ss}$. Toute méthode numérique capable de résoudre le problème local (1.34) peut être utilisée pour le calcul des comportements apparents. Nous avons utilisé la méthode des éléments finis classiques, pour ceci nous avons utilisé des maillages tels que ceux illustrés par la figure 1.9b, construits selon le principe exposé dans l'Annexe A.

Calcul des modules apparents

En se fondant sur les écritures tensorielles introduites précédemment, nous allons maintenant expliciter le principe de calcul des modules apparents des tenseurs de rigidité et des souplesses, pour un VE de taille (δ) , issu d'une réalisation (ω) , et soumis à des CLDH ou des CLCH. Le raisonnement étant identique pour les deux CL, nous l'exprimons sous forme matricielle, dans le cas des CLCH $\sigma.n = \bar{\sigma}.n \ \forall x \in \partial\Omega_\delta(\omega)$ indicé par (t). Le tenseur de déformation macroscopique exprimé en fonction du tenseur de contrainte homogène à travers

le tenseur des modules apparents S_δ^t dans la base (i, e_{ps}, e_{ss}) s'écrit

$$\bar{\varepsilon} = S_\delta^t : \bar{\sigma} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_m \\ \bar{\varepsilon}_{ps} \\ \bar{\varepsilon}_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2k_\delta^t} & \frac{1}{2\alpha_\delta^t} & \frac{1}{2\beta_\delta^t} \\ \frac{1}{2\alpha_\delta^t} & \frac{1}{2\lambda_\delta^t} & \frac{1}{2\gamma_\delta^t} \\ \frac{1}{2\beta_\delta^t} & \frac{1}{2\gamma_\delta^t} & \frac{1}{2\mu_\delta^t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_m \\ \bar{\sigma}_{ps} \\ \bar{\sigma}_{ss} \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

Le but est de déterminer les coefficients du tenseur des souplesses apparent (S_δ^t) en imposant les chargement nécessaires. Dans le cas des CLCH, nous imposons un chargement $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_m i = i$ et calculons les composantes du tenseur des déformations locales avec l'outil adéquat. Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode des éléments finis (MEF) avec le logiciel Cast3M. Un exemple de maillage d'un VE est fourni par la figure 1.9b. Lors du post-traitement, nous calculons la valeur moyenne $\bar{\varepsilon}$ du tenseur des déformations, qui d'après l'équation (1.38), correspond à la première colonne de la matrice S_δ^t , i.e. $\bar{\varepsilon}_m = \frac{1}{2k_\delta^t}$, $\bar{\varepsilon}_{ps} = \frac{1}{2\alpha_\delta^t}$, $\bar{\varepsilon}_{ss} = \frac{1}{2\beta_\delta^t}$. Les colonnes 2 et 3 de la matrice S_δ^t sont obtenues par la même procédure en appliquant des CLCH de cisaillement pur ($\bar{\sigma} = e_{ps}$) et simple ($\bar{\sigma} = e_{ss}$). A titre illustratif, les vecteurs contraintes issus des 3 CLCH sont représentés sur la figure 1.11. Les cartes des composantes du champ local de déformation obtenu par application de CLCH purement sphériques sont représentées sur la figure 1.12, leur moyenne respective fournissent les coefficients k_δ^t , α_δ^t et β_δ^t .

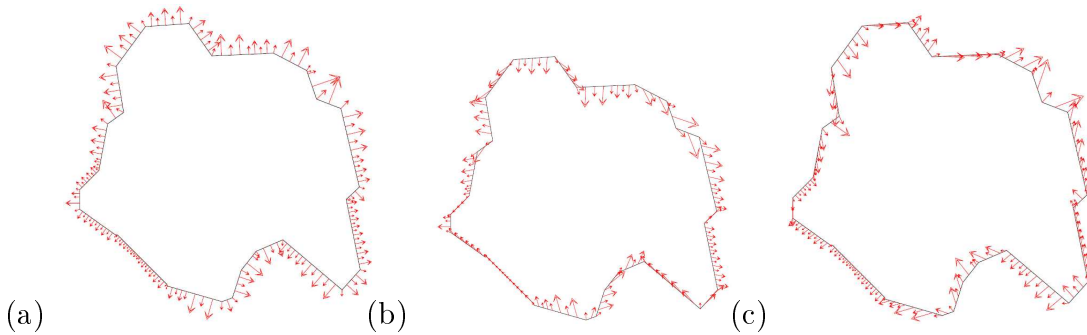


FIGURE 1.11 – Forces équivalentes aux noeuds associés à des CLCH appliquées sur le VE $B_\delta(\omega)$ (a) $\bar{\sigma} = i$ (b) $\bar{\sigma} = e_{ps}$ (c) $\bar{\sigma} = e_{ss}$

La même procédure s'applique pour le calcul de $C_\delta^d(\omega)$ en partant de 3 chargements différents en CLDA.

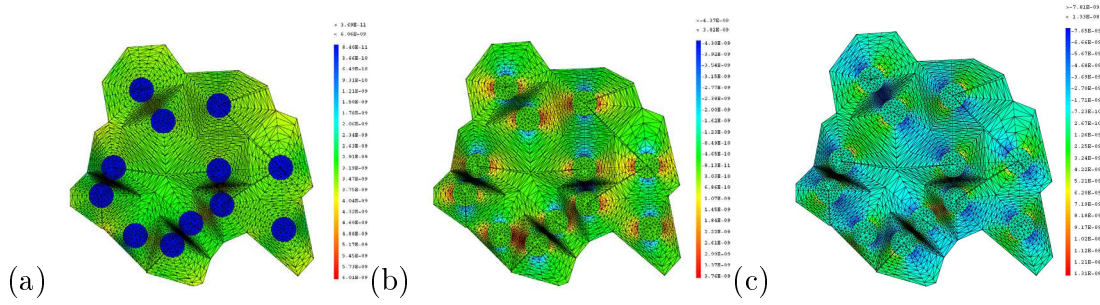


FIGURE 1.12 – Carte des composantes des déformations locales issues d'un chargement en CLCH hydrostatique (a) ε_m (b) ε_{ps} (c) ε_{ss}

1.5.5 Bornes du comportement effectif

Comme nous l'avons expliqué en 1.5.1, en raison de l'invariance par rotation autour de l'axe des fibres, le comportement effectif C^{eff} ainsi que les moyennes d'ensemble des comportements apparents associés aux VE non-carrés, i.e. C_δ^{VOR+} , sont isotropes transverses. Par conséquent, ils s'écrivent

$$C^{eff} = 2K^{eff}J_T + 2G^{eff}K_T, \quad C_\delta^{VOR+} = 2K_\delta^{VOR+}J_T + 2G_\delta^{VOR+}K_T, \quad (1.39)$$

où K et G sont les modules de compressibilité et de cisaillement plans. Le tenseur K_T , introduit par Walpole [58] et défini par $K_T = E_{ps} + E_{ss} = I - J_T$, est le projecteur sur le sous-espace des tenseurs déviatoriques plans du second ordre et I est le tenseur identité d'ordre 4. En utilisant la définition (1.28) de C_δ^{VOR+} associée aux équations (1.36) et (1.39) et en appliquant une déformation macroscopique purement sphérique ou déviatorique à l'encadrement (1.21) nous obtenons les nouvelles bornes supérieure et inférieure de type Voronoï des modules de compressibilité plan et de cisaillement du composite sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_T :: (E(S_\delta^t))^{-1} &= K_\delta^{VOR-} \leq K^{eff} \leq K_\delta^{VOR+} = \frac{1}{2}J_T :: E(C_\delta^d), \\ \frac{1}{2}K_T :: (E(S_\delta^t))^{-1} &= G_\delta^{VOR-} \leq G^{eff} \leq G_\delta^{VOR+} = \frac{1}{2}K_T :: E(C_\delta^d). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Comme nous l'avons indiqué dans la partie 1.4.3, les espérances intervenant dans l'équation (1.40) ainsi que dans toutes les formules associées aux bornes de type Voronoï doivent être comprises au sens de l'équation (1.31). Dans les applications numériques, le calcul des bornes du comportement effectif plan est effectué par le biais des formules (1.40). Dans la pratique, ceci revient à calculer $E(C_\delta^d)$, $(E(S_\delta^t))^{-1}$ puis à extraire, d'une part, les composantes en J_T de ces tenseurs qui correspondent aux bornes du module de compressibilité plan effectif et, d'autre part, la demi-somme de leurs composantes en E_{ps} et en E_{ss} qui correspondent

aux bornes du module de cisaillement effectif. Cependant, pour un comportement isotrope transverse comme celui inhérent à cette étude, les bornes de type Voronoï peuvent aussi être estimées par les expressions suivantes

$$\begin{aligned} K_{\delta}^{VOR+} &= E(K_{\delta}^d), \quad K_{\delta}^{VOR-} = \left(E\left(\frac{1}{K_{\delta}^t}\right) \right)^{-1}, \quad G_{\delta}^{VOR+} = E(\lambda_{\delta}^d) = E(\mu_{\delta}^d) = E\left(\frac{\lambda_{\delta}^d + \mu_{\delta}^d}{2}\right), \\ G_{\delta}^{VOR-} &= \left(E\left(\frac{1}{\lambda_{\delta}^t}\right) \right)^{-1} = \left(E\left(\frac{1}{\mu_{\delta}^t}\right) \right)^{-1} = \frac{1}{2} \left(\left(E\left(\frac{1}{\lambda_{\delta}^t}\right) \right)^{-1} + \left(E\left(\frac{1}{\mu_{\delta}^t}\right) \right)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Les formules (1.41) s'obtiennent facilement en utilisant à la fois l'isotropie transverse et la définition de C_{δ}^{VOR+} .

1.5.6 Calcul des bornes pour un nombre fini de réalisations

L'évaluation des bornes (1.40) requiert le calcul des espérances $E(C_{\delta}^d)$ et $(E(S_{\delta}^t))$. Dans la pratique, seule une estimation de la valeur exacte de ces espérances selon la définition (1.29) est calculée. Cependant, les résultats obtenus ne sont pas des bornes strictes du comportement effectif. Il s'agit simplement d'estimations numériques des bornes exactes, dont la précision augmente en fonction du nombre de réalisations n . La précision numérique de ces estimations peut être évaluée avec la notion d'intervalle de confiance (IC).

Si nous considérons la variable aléatoire $X(\omega)$ et les estimateurs non biaisés $\hat{X}_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega)$, $\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i(\omega) - \hat{X}_n(\omega))^2$ de sa moyenne $E(X)$ et de sa variance $\sigma^2(x)$, où $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ sont n répliques indépendantes de $X(\omega)$, l'intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha \in]0, 1[$ de $E(X)$ associé au n -échantillon $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ aléatoire est l'intervalle aléatoire $\hat{C}I_{1-\alpha}^n(E(X))(\omega)$ tel que $P(\hat{C}I_{1-\alpha}^n(E(X))(\omega) \ni E(X)) = 1 - \alpha$. Dans le cas symétrique, un tel intervalle est de la forme :

$$\hat{C}I_{1-\alpha}^n(E(X))(\omega) = \left[\hat{X}_n(\omega) - t(\alpha, n) \frac{\hat{S}_n(\omega)}{\sqrt{n}}, \hat{X}_n(\omega) + t(\alpha, n) \frac{\hat{S}_n(\omega)}{\sqrt{n}} \right] \quad (1.42)$$

où $t(\alpha, n)$ est un nombre réel positif tel que

$$P \left(\frac{|\hat{X}_n(\omega) - E(X)|}{\hat{S}_n(\omega)/\sqrt{n}} \leq t(\alpha, n) \right) = 1 - \alpha. \quad (1.43)$$

Pour cela, on se base sur le fait que la variable aléatoire $\sqrt{n} (\hat{X}_n(\omega) - E(X)) / \hat{S}_n(\omega)$ suit approximativement une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté si n est suffisamment grand et

tend vers une variable aléatoire gaussienne standard lorsque $n \rightarrow +\infty$. A partir de ce résultat, un intervalle de confiance déterministe de niveau $(1 - \alpha)$, $CI_{1-\alpha}^n(E(X))$ peut être construit pour $E(X)$. Soit $(X(\omega_1), \dots, X(\omega_n))$ un n -échantillon numérique de $X(\omega)$, où $(X(\omega_i), \omega_i \in \Theta, 1 \leq i \leq n)$ sont n réalisations indépendantes de $X(\omega)$. Alors $CI_{1-\alpha}^n(E(X))$ est donné par

$$CI_{1-\alpha}^n(E(X)) = \left[\bar{X}_n - t(\alpha, n) \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t(\alpha, n) \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right] \quad (1.44)$$

où $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(\omega_i)$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X(\omega_i) - \bar{X}_n)^2$. Un tel intervalle peut être considéré comme étant une réalisation particulière de l'intervalle aléatoire $\hat{CI}_{1-\alpha}^n(E(X))(\omega)$ [8]. Ainsi, la longueur $\frac{t(\alpha, n)S_n}{\sqrt{n}}$ est une caractérisation probabiliste de la précision de la valeur \bar{X}_n servant à estimer l'espérance $E(X)$.

Le résultat (1.44) est établi théoriquement seulement dans le cas d'estimations non biaisées \bar{X}_n et S_n qui sont définies en donnant le même poids à chaque réalisation. Dans les applications numériques, nous considérons une extension de (1.44) où les estimations \bar{X}_n et S_n sont désormais définis en utilisant des pondérations différentes $V_\delta(\omega_i)/\bar{V}_\delta$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{V_\delta(\omega_i)}{\bar{V}_\delta} X(\omega_i), \quad S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{V_\delta(\omega_i)}{\bar{V}_\delta} (X(\omega_i) - \bar{X}_n)^2}. \quad (1.45)$$

où $\bar{V}_\delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_\delta(\omega_i)$

On remarquera que l'IC (1.44) associé aux définitions (1.45) n'a pas de fondements théoriques rigoureux. Il correspond uniquement à une extension heuristique de la définition classique (1.44) qui utilise des moyennes d'ensemble à pondérations égales.

Cette notion d'IC est utilisée pour construire les estimations $K_{\delta, est}^+$ et $K_{\delta, est}^-$ des bornes supérieure et inférieure du comportement effectif définies de la façon suivante

$$K_{\delta, est}^+ = \bar{K}_\delta^d + \ell^{CI}(E(K_\delta^d)), \quad K_{\delta, est}^- = \left(\frac{1}{\bar{K}_\delta^t} + \ell^{CI}(E(1/K_\delta^t)) \right)^{-1} \quad (1.46)$$

Dans la définition (1.46), $\ell^{CI}(E(X))$ désigne la demi-longueur de l'IC de niveau $(1 - \alpha)$ de l'espérance $E(X)$, i.e. $\ell^{CI}(E(X)) = \frac{t(\alpha, n)S_n}{\sqrt{n}}$. Afin de simplifier les notations dans l'équation (1.46), la dépendance en n de \bar{X} et en n et α de $\ell^{CI}(E(X))$ et X_{est}^\pm a été omise. La définition de l'IC implique que

$$P(K_{\delta, est}^- \leq K^{eff} \leq K_{\delta, est}^+) \geq 1 - \alpha. \quad (1.47)$$

On notera que la moyenne d'ensemble \bar{X} utilisée dans l'équation (1.46) doit être comprise dans la suite de ce mémoire au sens d'une moyenne d'ensemble pondérée comme défini dans

(1.45) quand $K_{\delta,est}^+$ et $K_{\delta,est}^-$ sont obtenus en appliquant l'approche de type Voronoï soit au sens d'une moyenne d'ensemble classique de pondération égale quand $K_{\delta,est}^+$ et $K_{\delta,est}^-$ sont calculés à partir de l'approche classique de type Huet. La même interprétation reste valable quand il s'agit du calcul de l'estimation de l'écart-type.

1.6 Spécificités liées à la cellule carrée

Pour des VE carrés, les moyennes d'ensemble C_{δ}^{SC+} des comportements apparents associés aux cellules carrées présentent une symétrie quadratique notable contrairement aux bornes C_{δ}^{VOR+} qui sont isotropes transverses. En effet, bien que l'invariance par rotation autour de l'axe des fibres est toujours vérifiée par les relations constitutives des phases ainsi que par leur distribution (ceci étant vrai car la moyenne est effectuée sur tout l'espace des réalisations), la forme carrée de chaque VE induit une symétrie quadratique selon les axes e_1 , e_2 . Par conséquent, les bornes de type Huet s'écrivent

$$C_{\delta}^{SC+} = 2K_{\delta}^{SC+} J_T + 2\lambda_{\delta}^{SC+} E_{ps} + 2\mu_{\delta}^{SC+} E_{ss}. \quad (1.48)$$

En appliquant la définition (1.28) des bornes de Huet à (1.36) et en comparant le résultat obtenu à l'expression (1.48) nous obtenons l'expression suivante pour les modules de compressibilité plan K_{δ}^{SC+} , de cisaillement pur λ_{δ}^{SC+} et de cisaillement simple μ_{δ}^{SC+}

$$\begin{aligned} K_{\delta}^{SC+} &= E(K_{\delta}^d) = \frac{1}{2} J_T :: C_{\delta}^{SC+}, & K_{\delta}^{SC-} &= (E(1/K_{\delta}^t))^{-1} = \frac{1}{2} J_T :: (S_{\delta}^{SC-})^{-1}, \\ \lambda_{\delta}^{SC+} &= E(\lambda_{\delta}^d) = \frac{1}{2} E_{ps} :: C_{\delta}^{SC+}, & \lambda_{\delta}^{SC-} &= (E(1/\lambda_{\delta}^t))^{-1} = \frac{1}{2} E_{ps} :: (S_{\delta}^{SC-})^{-1}, \\ \mu_{\delta}^{SC+} &= E(\mu_{\delta}^d) = \frac{1}{2} E_{ps} :: C_{\delta}^{SC+}, & \mu_{\delta}^{SC-} &= (E(1/\mu_{\delta}^t))^{-1} = \frac{1}{2} E_{ps} :: (S_{\delta}^{SC-})^{-1}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Dans les équations (1.49) ainsi que dans toutes les expressions associées aux bornes de type Huet basées sur la cellule carrée, les espérances doivent être comprises au sens classique, c'est à dire avec une pondération égale pour chaque réalisation.

En appliquant un chargement en déformation $\bar{\varepsilon}$ ou en contrainte $\bar{\sigma}$ macroscopique en cisaillement pur (e_{ps}) ou en cisaillement simple (e_{ss}) à l'équation (1.13) et en utilisant les relations (1.49), nous obtenons les bornes suivantes pour le module de cisaillement effectif :

$$\sup \left(\lambda_{\delta}^{SC-}, \mu_{\delta}^{SC-} \right) \leq G^{eff} \leq \inf \left(\lambda_{\delta}^{SC+}, \mu_{\delta}^{SC+} \right). \quad (1.50)$$

A notre connaissance, la relation d'encadrement (1.50) qui utilise l'anisotropie quadratique de C_{δ}^{SC+} n'a jamais été ni utilisée ni démontrée auparavant. En effet, les bornes supérieure

et inférieure de Huet ont toujours été considérées comme isotropes dans la littérature. Cette approximation d'isotropie a été corroborée jusqu'à présent par différentes simulations numériques réalisées dans la littérature pour une certaine gamme de paramètres tels que des VE suffisamment grands ou dans le cas de faibles contrastes entre les phases. Même si nous trouvons nous aussi dans cette étude une isotropie des bornes de Huet dans le cas de certaines simulations - e.g. pour des composites renforcés, la borne inférieure est quasiment isotrope (jusqu'à 1% de précision) - leur symétrie quadratique (équation (1.48)) qui est justifiée théoriquement au début de cette partie par des arguments de symétrie est bien confirmée au cours de nombreuses simulations numériques. Par exemple, dans le cas de composites rigidifiés, l'estimation numérique de la borne de Huet supérieure - évaluée pour une fraction volumique de $f^I = 15\%$ - fournit un comportement quadratique ($\lambda_\delta^{SC+} \neq \mu_\delta^{SC+}$) comme on peut l'observer sur la figure 1.14 qui représente l'évolution des bornes supérieures des modules de cisaillement plans λ_δ^{SC+} , μ_δ^{SC+} en fonction de δ .

Enfin, les évolutions des bornes supérieures de type Huet des modules de cisaillement des composites renforcés de façon rigide peuvent être prédites en utilisant une approche simple inspirée de celle qui a été présentée dans la partie 1.3.3 et appliquée au module de compressibilité plan. Quand nous appliquons cette approche (équation (1.18)) au module de cisaillement pur, conduisant alors à $\lambda_\delta^{Ab} = \lambda^{eff} + \lambda^{(2)}/\delta$, nous constatons une bonne correspondance entre λ_δ^{Ab} et la borne de Huet supérieure λ_δ^{SC+} , ainsi que le montre la figure 1.14. Cependant, quand cette approche simplifiée est appliquée au module plan de cisaillement simple $\mu_\delta^{Ab} = \mu^{eff} + \mu^{(2)}/\delta$, la décroissance de μ_δ^{Ab} en $1/\delta$ ne reproduit pas l'évolution de la borne supérieure de type Huet μ_δ^{SC+} . Ceci s'explique en constatant que le déplacement imposé en cisaillement simple est parallèle au bord de la cellule carrée. Pour un chargement de ce type, les particules rigides qui intersectent le bord ne sont plus déformées mais en effet effectuent une translation et une rotation dans la matrice contrairement au cas du chargement en cisaillement pur où les particules du bord sont astreintes à s'allonger en conformité avec la déformation macroscopique de cisaillement pur. Par conséquent, ces particules ne sont pas à l'origine de la divergence de la borne μ_δ^{SC+} quand on leur applique directement une déformation de cisaillement simple. Cependant, il existe une exception à cette situation : les particules qui intersectent l'un des 4 coins du VE, - plus précisément les particules qui intersectent deux bords différents sont toujours déformées même quand elles sont soumises à un chargement en cisaillement simple. Afin de vérifier si cette observation est juste, nous adoptons le même raisonnement que celui sur lequel nous avons basé notre modélisation pré-

sentée dans la partie 1.3.3. La partie de l'énergie de déformation provenant des particules qui intersectent les coins du VE est prise en compte à travers une nouvelle partition du VE carré en deux parties. La première partie $V_\delta^{(1)} = 4d^2$ est composée de la zone associée aux 4 coins telles que toutes les particules qui intersectent les coins appartiennent à cette première zone. La deuxième partie $V_\delta^{(2)} = L^2 - V_\delta^{(1)}$ représente le coeur du VE, i.e. la partie où les particules rigides sont forcées d'être déformées par des CLDA en cisaillement simple (voir figure 1.13). Pour cette nouvelle partition, le ratio $V_\delta^{(1)}/V_\delta$ est désormais proportionnel à $1/\delta^2$ au lieu de $1/\delta$ comme dans le cas de la modélisation associée à des CLDA en cisaillement pur. En reproduisant le raisonnement introduit dans la partie 1.3.3, nous obtenons une expression analytique de la borne approchée (et non exacte) du module de cisaillement effectif

$$\mu^{eff} \leq \mu_\delta^{Ab} = \mu^{eff} + \frac{\mu^{(2)}}{\delta^2}. \quad (1.51)$$

Comme on peut le voir sur la figure 1.14, la correspondance entre la borne approchée et celle de type Voigt et de type Huet après avoir « fitté » numériquement la constante $\mu^{(2)}$ en $\delta = 30$ est satisfaisante et montre que la divergence de la borne supérieure du module de cisaillement simple dans le cas d'un matériau renforcé par des particules rigides peut s'expliquer par la contribution prédominante des particules rigides intersectant les coins du VE carré.

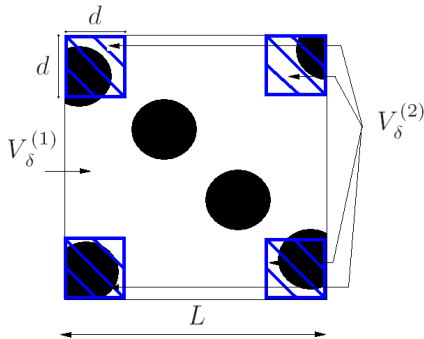


FIGURE 1.13 – Partition d'un VE carré associée à la borne approchée μ_δ^{Ab}

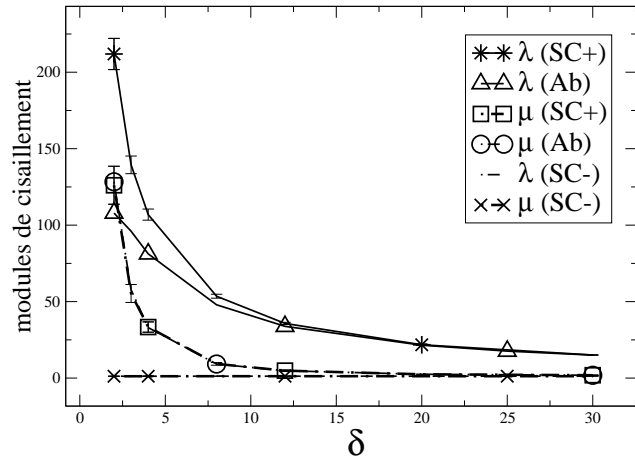


FIGURE 1.14 – Composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$, $f = 15\%$) : variation des bornes supérieures de type Huet ($\lambda(SC+)$, $\mu(SC+)$) et approchées ($\lambda(Ab)$, $\mu(Ab)$) du module de cisaillement effectif en fonction de δ

1.7 Mise en œuvre numérique

Pour les approches basées sur les cellules de Voronoï et carrées, les comportements apparents sont calculés en utilisant le logiciel éléments finis CAST3M selon la procédure présentée dans la partie 1.5.4. Cependant, le maillage est réalisé de façon différente en fonction de la morphologie des VE (carrés ou non-carrés).

1.7.1 Approche basée sur les VE de type Voronoï

Dans cette partie et la suivante, sont exposés les outils numériques utilisés dans chaque étape du processus de simulation et d'encadrement des propriétés effectives d'un matériau hétérogène. Nous utilisons pour nos calculs deux clusters dont le système d'exploitation est Linux. Le langage de programmation principal est le langage *C*. Il constitue le noyau du code et lance d'autres logiciels effectuant des tâches annexes. Le code peut être scindé en 5 parties principales : la génération de la microstructure du matériau hétérogène, sa partition en cellules de Voronoï, l'extraction de VE de taille δ , les calculs des comportements apparents par éléments finis et enfin le post traitement (voir Annexe B.1).

La première partie du code génère la microstructure du matériau hétérogène en se basant sur la méthodologie exposée dans la partie 1.5.2. Le programme génère aléatoirement sur un très grand domaine $L_{macro} \times L_{macro}$ les coordonnées (x, y) des centres des inclusions en respectant le modèle de noyau de cerise. Le code arrête la génération de points dès lors que la fraction volumique souhaitée est atteinte. Le résultat de cette étape est un fichier texte contenant les coordonnées de tous les centres créés.

La deuxième étape consiste à discrétiser le milieu hétérogène en cellules de Voronoï en partant des coordonnées des centres des inclusions créés au cours de la première étape. Il existe de nombreux algorithmes de partition en cellules de Voronoï. Parmi ceux-ci nous avons utilisé celui fourni par la fonction *voronoi*(x, y) du logiciel Matlab. Dans cette partie du code *C*, nous développons une commande en Shell qui lance le logiciel Matlab. Ce dernier récupère les coordonnées des centres des inclusions dans le fichier créé précédemment et calcule la partition en cellules de Voronoï correspondante. Puis, Matlab renvoie des fichiers texte contenant, dans un ordre circulaire, les coordonnées des points de la cellule de Voronoï relatives à chaque centre d'inclusion.

La troisième étape consiste à revenir dans le programme principal en *C* et à extraire

les n VE de taille δ qui serviront au calcul des bornes du comportement effectif. Pour les applications numériques nous avons choisi $n = 2000$ pour $\delta = 2, 3, 4, 8, 12$ et $n = 1000$ pour $\delta = 20, 25, 30$. Au cours de cette étape, le programme récupère les fichiers textes créés par Matlab et dispose alors de toutes les cellules de Voronoï relatives aux inclusions créées au début. Ensuite, le programme crée aléatoirement les centres des fenêtres fictives d'extraction de formes carrées, qui serviront à définir les VE de calcul. Ces fenêtres ne se recouvrent pas afin de ne pas biaiser la statistique de l'étude. Un VE est construit en sélectionnant les centres des inclusions comprises dans la fenêtre d'extraction et en affectant à ces centres les sommets de la cellule de Voronoï relative à chaque centre sélectionné. Ces informations sont stockées sous la forme d'un fichier texte. Nous disposons ainsi à l'issue de cette étape, d'un ensemble de VE construit à partir d'un assemblage de cellules de Voronoï.

Dans la quatrième étape, nous calculons les propriétés apparentes des VE construits précédemment en utilisant la méthode des EF et le logiciel Cast3M du CEA. Cette étape se divise en deux sous-étapes : celle liée au maillage qui est effectué en grande partie au sein du programme C , et celle concernant le calcul EF qui est réalisé sous Cast3M.

La sous-étape de maillage vise à créer un maillage adaptatif pour chaque VE de calcul, et ce, quelle que soit la répartition des inclusions dans celui-ci. La procédure de maillage est exposée en détails dans l'Annexe A. Elle est mise en œuvre principalement dans le programme principal en C et est contrôlée par 4 paramètres principaux. Le rôle de ces paramètres est d'assurer deux conditions nécessaires à un maillage efficace pour des composites de type matrice-inclusions : d'une part une bonne discrétisation dans la zone proche de l'interface matrice-inclusion, d'autre part une décroissance de la finesse de maillage quand on s'éloigne des inclusions. Cette deuxième condition assure un maillage fin entre deux inclusions qui sont proches et prend donc en compte le phénomène d'interaction entre les inclusions proches. Elle assure également un maillage plus grossier dans les zones de phase matricielle situées suffisamment loin des inclusions. En effet, selon la solution du problème d'Eshelby [17], les champs locaux sont de moins en moins perturbés et deviennent homogènes quand on s'éloigne suffisamment des inclusions. Ce grossissement du maillage quand on s'éloigne des inclusions permet de diminuer le nombre total des EF et donc de réduire le temps de calcul tout en conservant une bonne précision sur la solution. Un exemple de maillage d'un VE selon la procédure présentée est fourni par la figure 1.15a. Nous avons par ailleurs réalisé une étude de convergence de maillage en fonction de la valeur des paramètres du maillage. Afin de quantifier l'erreur générée par la méthode numérique proposée, nous avons étudié l'influence

du nombre d'EF dans l'évaluation du comportement apparent associé à des CLDA et à des CLCH. L'étude a été réalisée sur un VE non-carré de taille $\delta = 12$ composé de 27 inclusions rigides présentant un contraste $c = 10^4$, une fraction volumique $f^I = 15\%$ et soumis respectivement à des CLDA et à des CLCH. Des éléments quadratiques ont été employés dans les calculs EF. Les résultats sont présentés sur la figure 1.15b qui montre l'évolution de la précision relative $X_\delta^{rela}(n_e) = (X_\delta(n_e) - X_\delta(n_e^\infty)) / X_\delta(n_e^\infty)$ en fonction du nombre n_e d'EF, où X_δ représente les différents modules apparents $K_\delta^{d,t}$, $\mu_\delta^{d,t}$, $\lambda_\delta^{d,t}$. Les précisions relatives reportées sur la figure 1.15b ont été calculées pour $n_e^\infty = 22500$ après avoir constaté que ces modules n'évoluaient plus au delà de cette valeur. Dans la suite de ce mémoire, tous les calculs ont été réalisés avec des paramètres de maillage correspondant à une précision de 0.1%.

La sous-étape de calculs EF s'effectue à l'aide d'une commande en Shell qui lance le logiciel Cast3M. Ce dernier récupère les fichiers de maillage ainsi que les coordonnées des centres des inclusions et des sommets des cellules de Voronoï associées au VE considéré. Nous utilisons des éléments de maillage TRI6. Le VE est ainsi totalement défini dans Cast3M ainsi que son maillage. A l'aide de l'étape d'homogénéisation détaillée dans la partie 1.5.4, le logiciel calcule les modules apparents associés à des CLDA et des CLCH. Les modules apparents du VE sont ensuite écrits dans des fichiers textes qui sont récupérés par le programme principal. Ce dernier rajoute les résultats récupérés à ceux issus des autres réalisations. La boucle se répète jusqu'à ce que les n réalisations requises soient traitées.

La cinquième et dernière étape consiste à post-traiter les résultats obtenus à l'issu des étapes précédentes. Le post-traitement est assuré par un deuxième programme en C qui récupère les fichiers de résultats issus des n réalisations pour chacun des δ considérés. Puis nous calculons et traçons l'évolution des bornes du comportement effectif du matériau hétérogène en fonction de δ accompagnées de leurs IC.

1.7.2 Approche basée sur des VE carrés

Afin de pouvoir comparer les résultats issus de notre approche à ceux issus de l'approche de Huet basée sur des VE de forme carrée, nous avons développé un outil numérique (voir Annexe B.2) dont le principe ainsi que les moyens mis en œuvre pour son élaboration sont identiques à ceux que nous avons exposés dans la partie 1.5. Il s'agit d'un programme en langage C constitué des cinq parties principales évoquées précédemment. La différence avec le programme présenté réside dans les troisième et quatrième étapes concernant respectivement

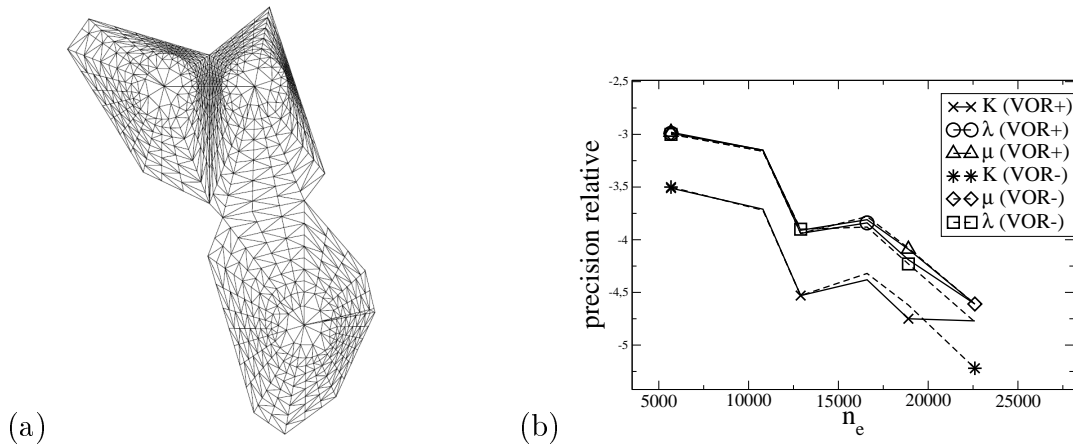


FIGURE 1.15 – Maillage d'un VE de type Voronoï (a) et convergence du maillage (b)

l'extraction des VE et le maillage de la microstructure en vue du calcul de leurs modules apparents avec CAST3M.

En effet, au cours de la troisième étape, nous construisons désormais des VE de forme carrée et de taille δd au sein du milieu hétérogène. Pour cela, le programme fournit aléatoirement les centres des VE carrés de sorte qu'ils ne se recouvrent pas, puis à partir de ces derniers, nous définissons la frontière carrée des VE. Chaque VE associé à une réalisation est composé de la matrice contenue dans le carré extrait, des inclusions totalement contenues dans le carré extrait mais aussi des parties d'inclusions coupées par la frontière du carré et contenues dans ce dernier. Les informations nécessaires à la restitution d'un VE carré consistent donc en son centre X et en tous les centres d'inclusions compris dans un carré de même centre X et de côté $L + d$. Cette procédure est appliquée pour les n réalisations correspondant à une taille δ fixée.

La quatrième étape concerne le maillage et le calcul des propriétés mécaniques apparentes du VE. L'étape de maillage s'effectue avec le mailleur Netgen V4.9.13 [30]. Les commandes Netgen concernant les maillages 2D étant très limitées, nous avons dû utiliser celles relatives à un maillage 3D. Pour cela nous avons créé à partir du VE 2D un VE 3D en affectant une épaisseur très faible ($e \ll 1$) au VE 2D issu de l'étape précédente. Concrètement, le rajout d'une troisième dimension au VE revient à rentrer les coordonnées des centres des inclusions dans Netgen, centres définis comme étant les points par lesquels passent l'axe d'un cylindre ayant pour hauteur e et pour rayon celui, r , d'une inclusion. De même, nous définissons la matrice comme étant un parallélépipède de face carrée, celle de la fenêtre d'extraction, et d'épaisseur e . Le logiciel Netgen maille ensuite le VE en 3D à l'aide d'EF de type TRI6

(voir figure 1.16a). Nous convertissons le maillage 3D en maillage 2D, compatible avec la nature du problème mécanique que nous traitons, grâce à un programme *C* lancé par le code principal. Le principe de cette conversion consiste à extraire à partir du maillage 3D les noeuds appartenant au VE 2D initial. Le résultat de cette opération est un fichier de maillage qui sert d'entrée à Cast3M pour l'étape suivante.

Le logiciel EF récupère le fichier de maillage 2D et effectue les calculs de structure sur le VE afin de déterminer ses modules apparents. De même que dans le cas des VE non-carrés, la précision de calcul relativement au maillage fourni par le logiciel Netgen a été évaluée sur un VE de même taille $\delta = 12$ composé d'inclusions rigides ($c = 10^4$) présentant une fraction volumique $f^I = 15\%$ et soumis à des CLDA et des CLCH. Les résultats calculés pour $n_e^\infty = 70000$, sont présentés sur la figure 1.16b qui décrit l'évolution de la précision relative des modules apparents en fonction de n_e . On remarquera que pour atteindre une précision relative de 0.1% avec Netgen, nous avons besoin d'utiliser 5 fois plus d'éléments que dans le cas de notre algorithme de maillage. Les mêmes étapes que celles décrites pour des VE non-carrés sont ensuite reprises terminant ainsi la procédure numérique.

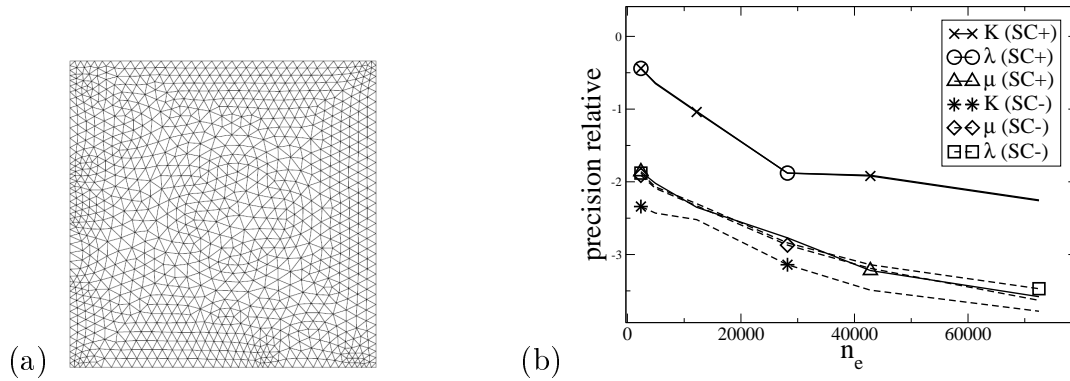


FIGURE 1.16 – Mallaige d'un VE carré (a) et convergence du maillage (b)

1.8 Résultats

Les simulations numériques ont été réalisées pour plusieurs contrastes ($c = 10^4, 10^2, 5, 10^{-4}$) et fractions volumiques ($f^I = 15\%, 30\%$) prenant ainsi en compte 3 classes différentes de composite de type matrice-inclusions à microstructure aléatoire : les composites renforcés de manière rigide ($c = 10^4$), les matériaux biphasés ($c = 5, 10^2$) et les matériaux poreux ($c = 10^{-4}$). Pour toutes les applications numériques, $n = 2000$ pour $2 \leq \delta < 20$ ou $n = 1000$

pour $20 \leq \delta \leq 30$. La probabilité pour que l'intervalle de confiance contienne l'espérance $E(X)$ est fixée à 99%, i.e. $\alpha = 0.01$. Pour une telle valeur de α , le paramètre de Student $t(\alpha, n)$ satisfait $t(0.01, n) = 2.56$ pour tout $n \geq 100$.

1.8.1 Equivalence entre les processus stochastiques de type VE1 et VE2

Les figures 1.17a et 1.17b présentent l'évolution en fonction de δ des bornes des modules de compressibilité et de cisaillement plans effectifs calculées avec les deux types de VE que nous avons notés par VE1 et VE2 issus de deux processus stochastiques proches mais différents. Nous avons réalisé les calculs pour des tailles de fenêtres valant $\delta = 2, 3, 4, 8, 12$. Nous constatons que les bornes issues du VE2 correspondent bien aux bornes issues du VE1. Cette remarque est parfaitement vérifiée pour $\delta \geq 8$. En revanche pour des faibles valeurs de δ , il existe une très légère différence entre les deux approches. Cependant, on remarque pour ces faibles δ que les bornes associées à l'un ou l'autre type de VE se situent à l'intérieur de l'IC correspondant à l'autre type de VE. La précision de l'IC étant ici de 1%, en première approximation, on peut donc considérer que les processus conduisant à la définition des VE de type VE1 et VE2 sont équivalents pour l'estimation des bornes du comportement effectif. Dans toute la suite du mémoire, on effectuera les calculs à l'aide des VE de type VE1.

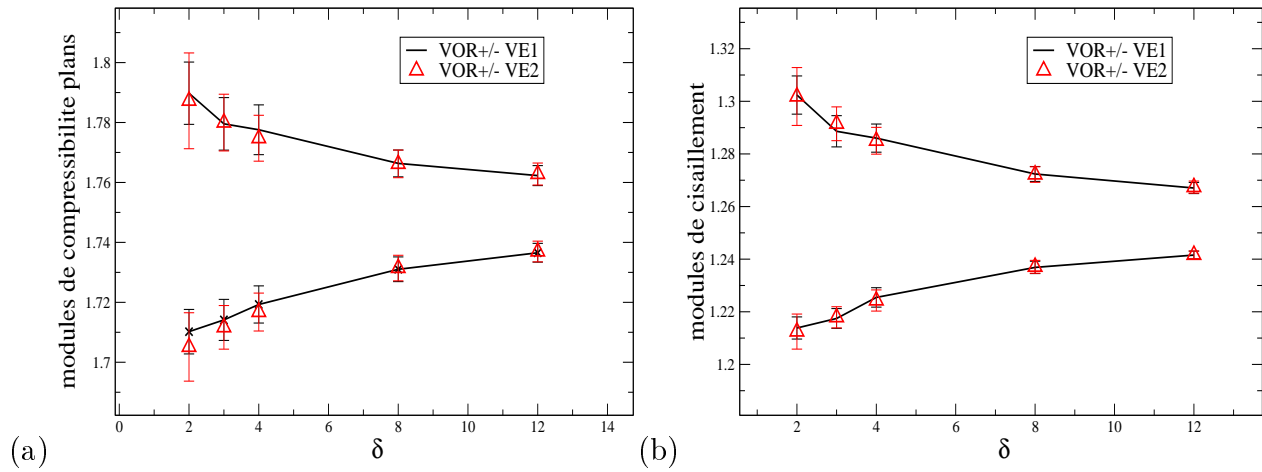


FIGURE 1.17 – Composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$, $f^I = 15\%$) : comparaison des bornes de type Voronoï ($VOR + / -$) des modules de compressibilité et de cisaillement plans effectifs calculées avec des VE issus de centres aléatoires (VE1) (a) et des VE issus de la grille fixe (VE2) (b)

1.8.2 Étude pour divers contrastes

Cas du composite renforcé de façon rigide $c = 10^4$

L'évolution en fonction de δ des bornes de type Voronoï et Huet du module de compressibilité plan effectif d'un composite renforcé de manière rigide pour une fraction volumique $f^I = 15\%$ sont représentées sur la figure 1.18. Pour toutes les courbes présentées dans ce mémoire, les barres d'erreur représentent l'intervalle de confiance de l'espérance considérée. Comme le montre la figure 1.18a, la borne supérieure de type Voronoï K_δ^{VOR+} améliore significativement la borne supérieure de type Huet K_δ^{SC+} - jusqu'à 10000% pour de faibles valeurs de δ . La borne inférieure de type Voronoï améliore aussi légèrement les bornes inférieures de type Huet (figure 1.18b). De plus, les bornes supérieure et inférieure de type Voronoï de K^{eff} sont très resserrées et convergent rapidement vers le module de compressibilité plane effectif quand δ augmente. Par exemple, pour $\delta \geq 20$ l'écart relatif entre les deux bornes $(\Delta K_\delta / K_\delta)^{VOR} = (K_\delta^{VOR+} - K_\delta^{VOR-}) / (K_\delta^{VOR+} + K_\delta^{VOR-})$ vérifie $(\Delta K_\delta / K_\delta)^{VOR} \leq 0,85\%$.

Pour un composite renforcé par des fibres rigides, les bornes inférieures de type Huet pour les modules de cisaillement pur et simple sont confondues contrairement aux bornes supérieures correspondantes qui représentent une symétrie cubique prononcée (figures 1.19).

Dans ce qui suit, bien que les bornes de Huet présentent une symétrie cubique, nous choisissons par soucis de simplification de reporter uniquement la partie isotrope représentée par les modules K_δ^{SC+} et G_δ^{SC+} . On notera cependant que tous les résultats des comparaisons entre les bornes isotropes de type Voronoï et de type Huet restent valables quand on remplace G_δ^{SC+} par λ_δ^{SC+} ou μ_δ^{SC+} . Les modules isotropes plans sont définis par

$$\begin{aligned} G_\delta^{SC+} &= \frac{1}{2} K_T :: C_\delta^{SC+} = \frac{1}{2} \left(\lambda_\delta^{SC+} + \mu_\delta^{SC+} \right), \\ G_\delta^{SC-} &= \frac{1}{2} K_T :: \left(S_\delta^{SC-} \right)^{-1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\lambda_\delta^{SC-}} + \frac{1}{\mu_\delta^{SC-}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

et par les équations (1.49)_{1,2} pour K_δ^{SC-} . Etant donné que λ_δ^{SC+} et μ_δ^{SC+} sont tous deux des bornes supérieure ou inférieure du module de cisaillement effectif G^{eff} , cette propriété reste valable pour G_δ^{SC+} .

Ainsi, comme le montre les figures 1.18 et 1.19, l'effet de surévaluation artificielle des modules apparents induit par l'application directe de conditions aux limites sur les particules rigides peut être supprimé par l'approche de type Voronoï. Les estimations calculées avec cette nouvelle approche fournissent des évaluations précises du comportement effectif même dans le cas de faibles valeurs de δ . De plus, elles conservent leur statut de bornes associées

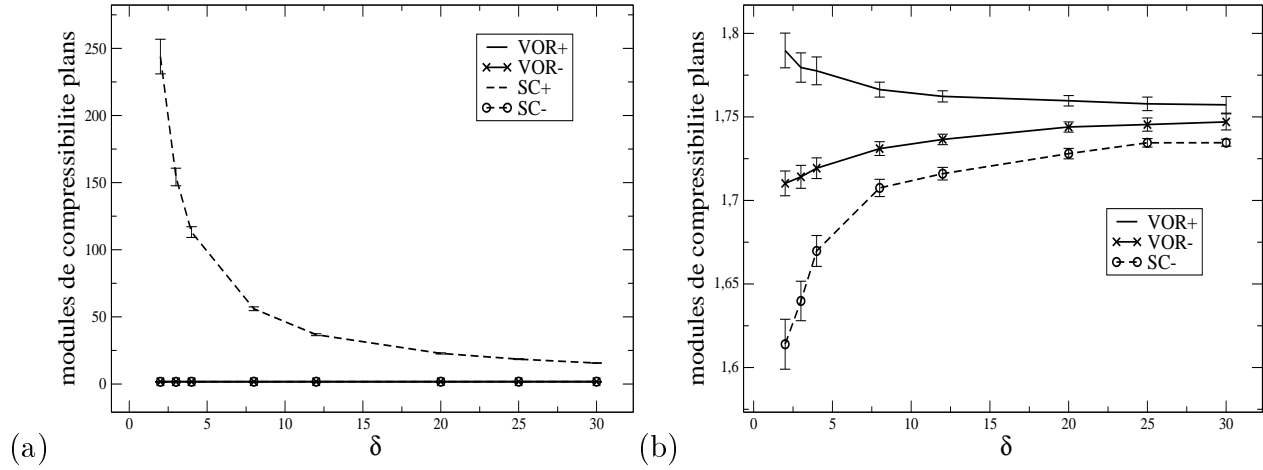


FIGURE 1.18 – Composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$, $f^I = 15\%$) : évolution des bornes de type Huet (SC^+) et de type Voronoï (VOR^+) du module de compressibilité plan effectif K^{eff} en fonction de δ (a), zoom (b)

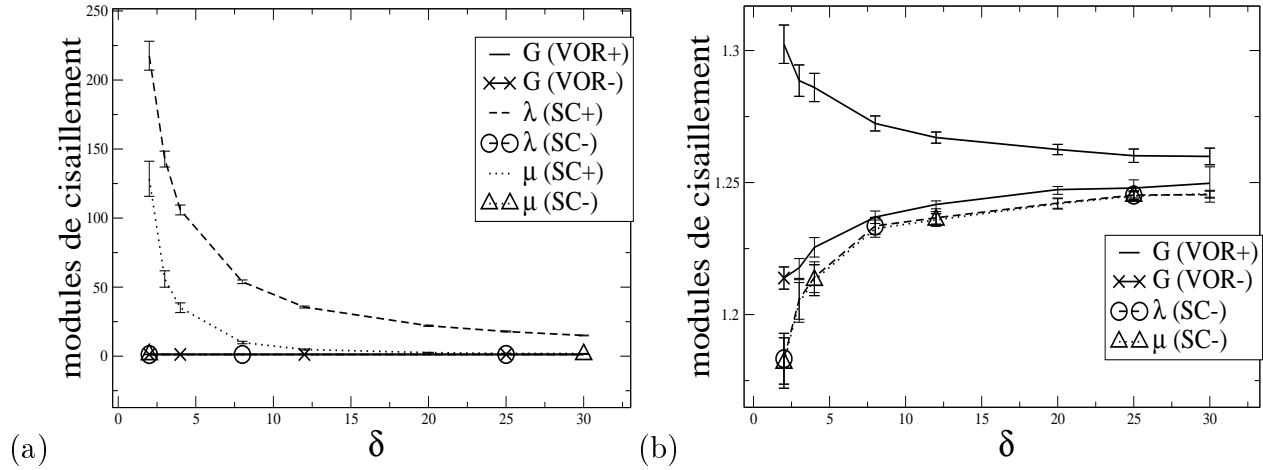


FIGURE 1.19 – Composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$, $f^I = 15\%$) : évolution en fonction de δ des bornes de type Huet ($\lambda(SC^+)$, $\mu(SC^+)$) et de type Voronoï ($G(VOR^+)$) du module de cisaillement effectif G^{eff} (a), zoom (b).

à des conditions aux limites uniformes contrairement aux estimations du comportement effectif calculées en appliquant l'approche de Huet pour des CL périodiques, e.g. [33, 44], qui demeurent certes efficaces mais n'ont pas le statut de bornes.

Cas des matériaux biphasés ($c = 10^2$ et $c = 5$)

Les évolutions en fonction de δ des estimations $K_{\delta,est}^+$ des bornes supérieure $E(K_\delta^d)$ et inférieure $E(1/K_\delta^t)^{-1}$ (de type Huet et Voronoï) définies en (1.46) sont reportées sur les

figures 1.20 et 1.21 dans le cas d'un matériau biphasé ayant un contraste élevé $c = 10^2$. Comme nous l'avons mentionné dans la partie 1.5.6, l'intérêt d'utiliser les estimations $K_{\delta,est}^+$ et $K_{\delta,est}^-$ des bornes $E(K_\delta^d)$ et $E(1/K_\delta^t)^{-1}$ au lieu des valeurs approchées \overline{K}_δ^d , $\left(\overline{1/K}_\delta^t\right)^{-1}$ réside dans leur interprétation statistique rigoureuse illustrée par l'équation (4.1) pour un paramètre $\alpha = 0.01$. Sur les figures 1.20 et 1.21, pour une fraction volumique des inclusions de $f^I = 15\%$, nous observons les mêmes tendances que celles obtenues dans le cas du composite renforcé. De plus, on remarquera que les bornes de type Voronoï associées au composite renforcé et au matériau biphasé à fort contraste ($c = 10^2$) sont identiques contrairement à la borne supérieure de type Huet qui en plus d'être trop raide présente une forte dépendance (non justifiable physiquement) vis-à-vis du module de compressibilité des fibres.

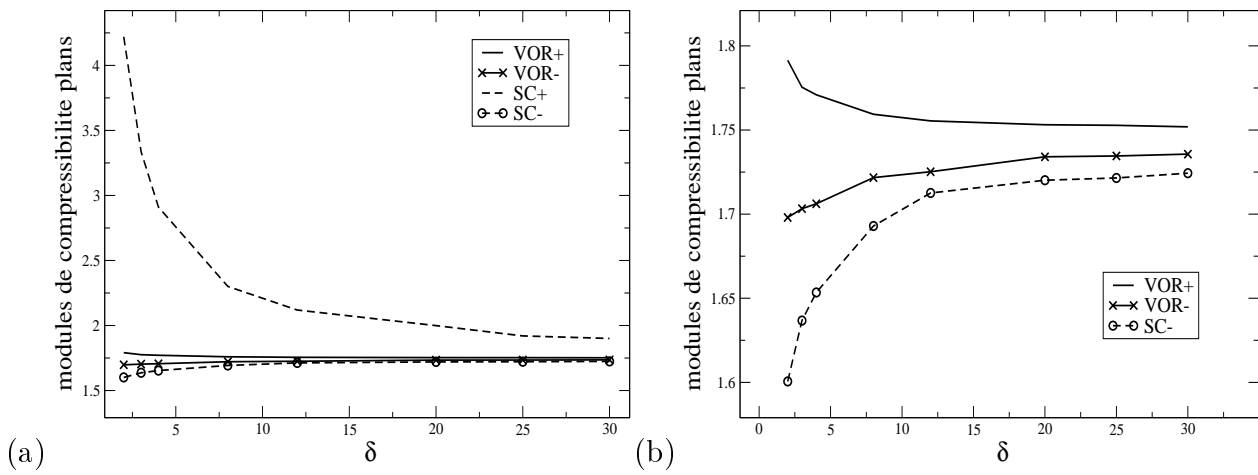


FIGURE 1.20 – Matériau biphasé ($c = 10^2$, $f^I = 15\%$) : évolution en fonction de δ des estimations $K_{\delta,est}^+$ des bornes de type Huet (SC_+^+) et de type Voronoï (VOR_+^+) du module de compressibilité plan effectif K^{eff} (a), zoom (b)

Les évolutions des bornes de type Voronoï et de type Huet des modules de compressibilité et de cisaillement plans en fonction de δ sont représentées respectivement sur les figures 1.22a et 1.22b, pour un matériau biphasé à faible contraste entre les phases $c = 5$. De nouveau, les figures 1.22 montrent que les bornes de type Voronoï améliorent à la fois les bornes supérieure et inférieure de type Huet qui, comme attendu dans le cas des faibles contrastes fournissent de bonnes estimations du comportement effectif même pour des faibles valeurs de δ .

Cas des matériaux poreux ($c = 10^{-4}$)

Nous avons également étudié le comportement apparent des matériaux poreux ($c = 10^{-4}$).

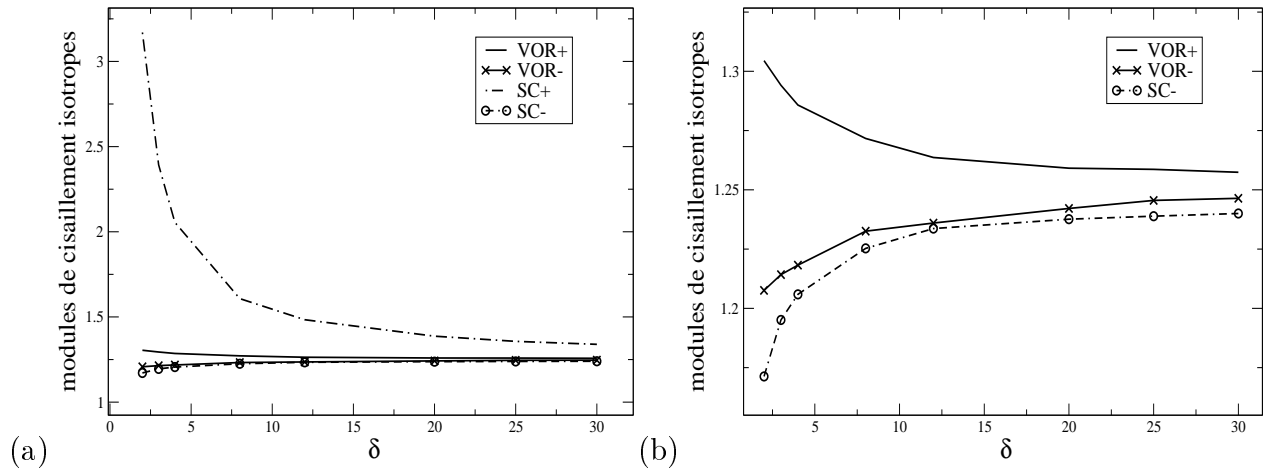


FIGURE 1.21 – Matériau biphasé ($c = 10^2$, $f^I = 15\%$) : évolution en fonction de δ des estimations $G_{\delta, \text{est}}^+$ des bornes de type Huet (SC_{\pm}^+) et de type Voronoï (VOR_{\pm}^+) du module de cisaillement plan effectif G^{eff} (a), zoom (b)

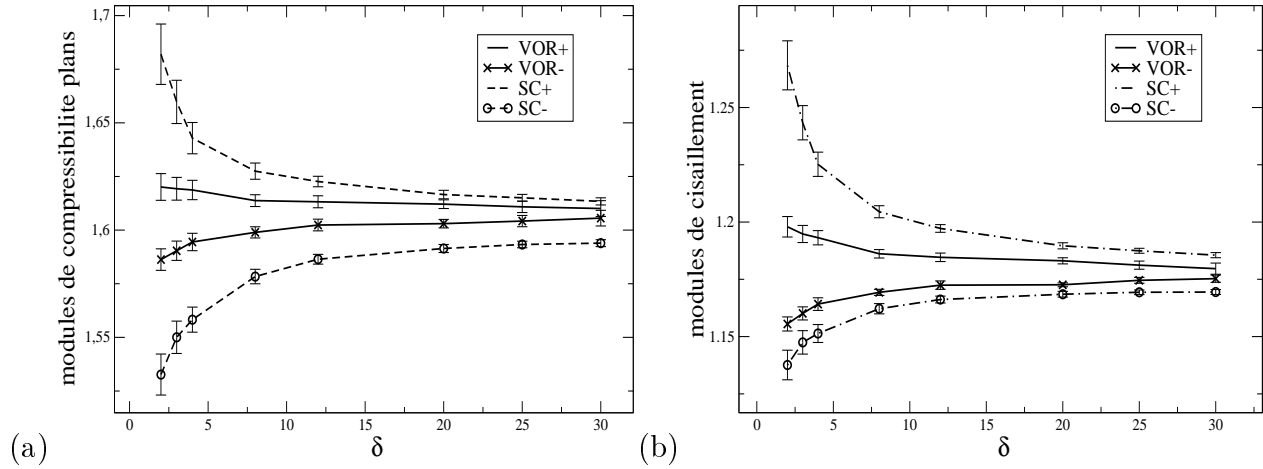


FIGURE 1.22 – Matériau biphasé ($c = 5$, $f^I = 15\%$) : évolution en fonction de δ des bornes de type Huet (SC_{\pm}^+) et de type Voronoï (VOR_{\pm}^+) du module de compressibilité plan effectif K^{eff} (a) et du module de cisaillement plan effectif G^{eff} (b)

Les évolutions des bornes de type Voronoï et de type Huet des modules effectifs de compressibilité et de cisaillement plans en fonction de δ sont représentées sur la figure 1.23 pour la même fraction volumique que les cas précédents $f^I = 15\%$. Similairement au cas d'un composite renforcé, les bornes de type Voronoï améliorent les bornes inférieure et supérieure de type Huet pour les deux modules étudiés. En plus de l'amélioration prévisible des bornes inférieures, on obtient aussi une légère amélioration des bornes supérieures. Bien que les bornes supérieure et inférieure de type Voronoï des modules K^{eff} et G^{eff} d'un matériau

poreux restent resserrées, elles convergent néanmoins plus lentement vers le comportement effectif que celles associées au composite renforcé.

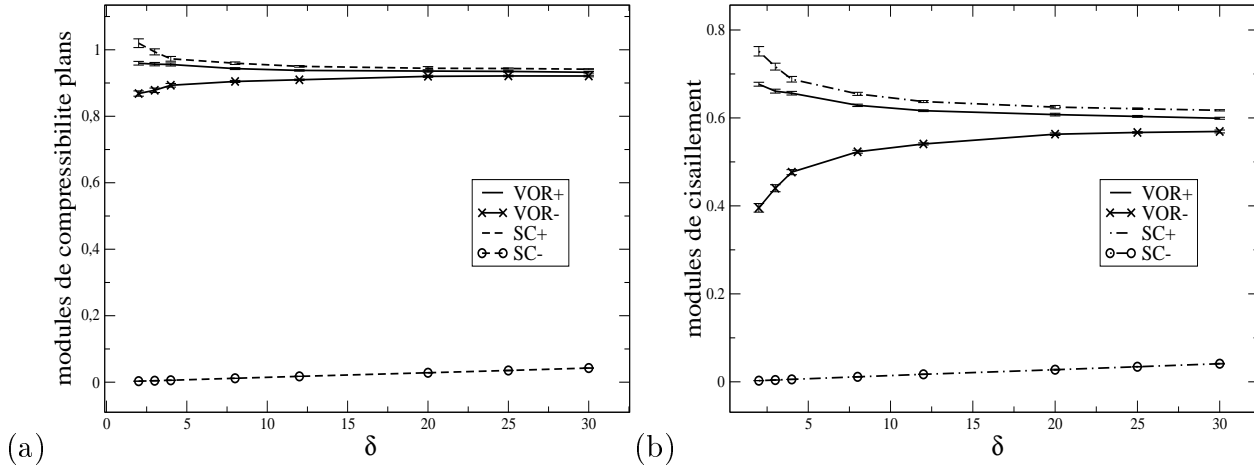


FIGURE 1.23 – Matériau poreux ($c = 10^{-4}$, $f^I = 15\%$) : évolution des bornes de type Huet (SC^+) et de type Voronoï (VOR^+) du module de compressibilité plan effectif K^{eff} (a) et du module de cisaillement effectif G^{eff} (b)

Evolution des modules en fonction du contraste

Dans le but de vérifier que les bornes de type Voronoï, calculées pour les contrastes $c = 10^4$ et $c = 10^{-4}$, correspondent bien aux deux cas extrêmes d'un matériau hétérogène à contraste infini entre ses phases - c'est à dire à un composite renforcé par des fibres rigides ($c = +\infty$) et à un matériau poreux ($c = 0$) - nous avons tracé sur les figures 1.24a et 1.24b l'évolution des bornes supérieure et inférieure de type Voronoï des modules de compressibilité et de cisaillement plans effectifs en fonction du contraste qui varie entre 10^{-9} et 10^9 . Les calculs ont été réalisés pour deux tailles différentes de VE ($\delta = 2$ et $\delta = 12$). Comme le montrent les figures 1.24a et 1.24b, les bornes de type Voronoï des modules de compressibilité et de cisaillement plans effectifs ne varient plus pour un contraste $c \leq 10^{-3}$ ou $c \geq 10^2$ montrant ainsi que chacune des bornes de type Voronoï atteint une limite qui correspond au cas des contrastes infinis. Les figures 1.24a et 1.24b montrent ainsi que les bornes du comportement effectif obtenues pour $c = 10^4$ et $c = 10^{-4}$ correspondent bien respectivement aux bornes du comportement effectif du composite renforcé par des fibres rigides et du matériau poreux.

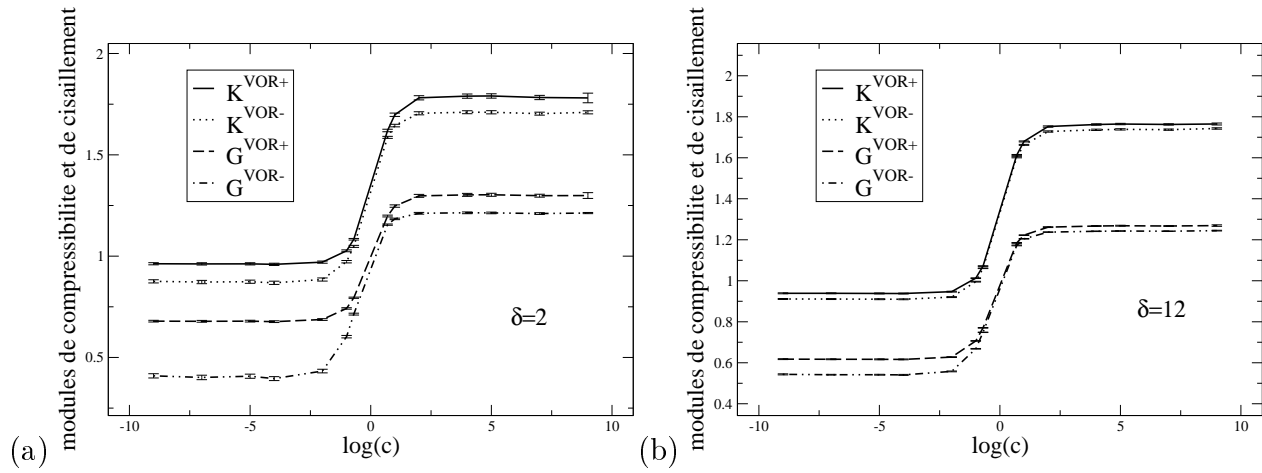


FIGURE 1.24 – Evolution des bornes supérieure et inférieure de type Voronoï ($VOR + / -$) des modules de compressibilité et de cisaillement plans effectifs en fonction du contraste : (a) $\delta = 2$, (b) $\delta = 12$. $f^I = 15\%$.

1.8.3 Composites à fraction volumique plus élevée

Afin d'étudier l'influence de la fraction volumique d'inclusions sur les comportements apparents, nous avons calculé pour une autre fraction volumique $f^I = 30\%$ les évolutions des bornes de type Voronoï et de type Huet des modules de compressibilité et de cisaillement plans en fonction de δ pour les composites renforcés ainsi que les matériaux biphasés et poreux (figures 1.25 à 1.30). D'une façon générale, les tendances obtenues suite à ces calculs sont similaires à celles observées pour $f^I = 15\%$ à l'exception du fait que la convergence des bornes vers les modules effectifs se produit pour des valeurs de δ plus importantes.

Par exemple, si l'on considère l'évolution des bornes du module de cisaillement plan d'un matériau poreux (ce qui correspond à la situation la plus défavorable), l'écart relatif entre les bornes inférieure et supérieure de type Voronoï $(\Delta G_\delta / G_\delta)^{VOR}$ à $\delta = 30$ vaut 4.5% pour $f^I = 30\%$ tandis qu'elle vaut 2.5% pour $f^I = 15\%$. Ce résultat peut s'expliquer par le fait que plus f^I augmente, plus les particules sont proches les unes des autres, plus il y aura d'interaction mécanique entre elles, et par conséquent, plus les propriétés apparentes vont fluctuer. Cette grande variabilité du comportement apparent peut ainsi induire une croissance de la taille du VER. Cependant, cette explication n'est pas satisfaisante pour toutes les fractions volumiques. En effet, quand f^I tend vers des valeurs importantes, e.g. le seuil de percolation, la distribution des inclusions est géométriquement plus contrainte et devient ainsi plus homogène. Bien que les interactions mécaniques soient accentuées en raison de

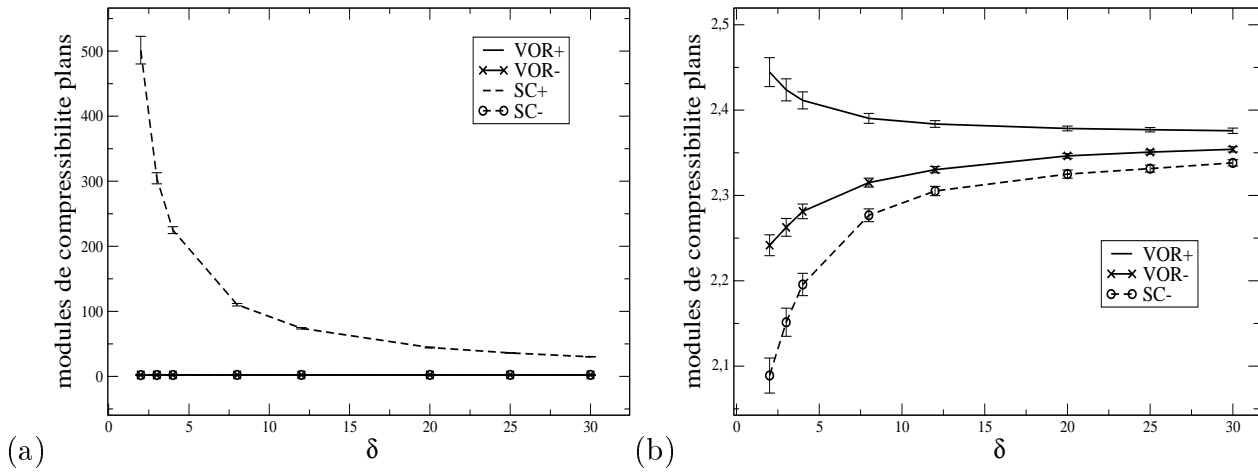


FIGURE 1.25 – Composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$, $f^I = 30\%$) : évolution des bornes de type Huet (SC^+) et de type Voronoï (VOR^+) du module de compressibilité plan effectif K^{eff} (a) et zoom (b)

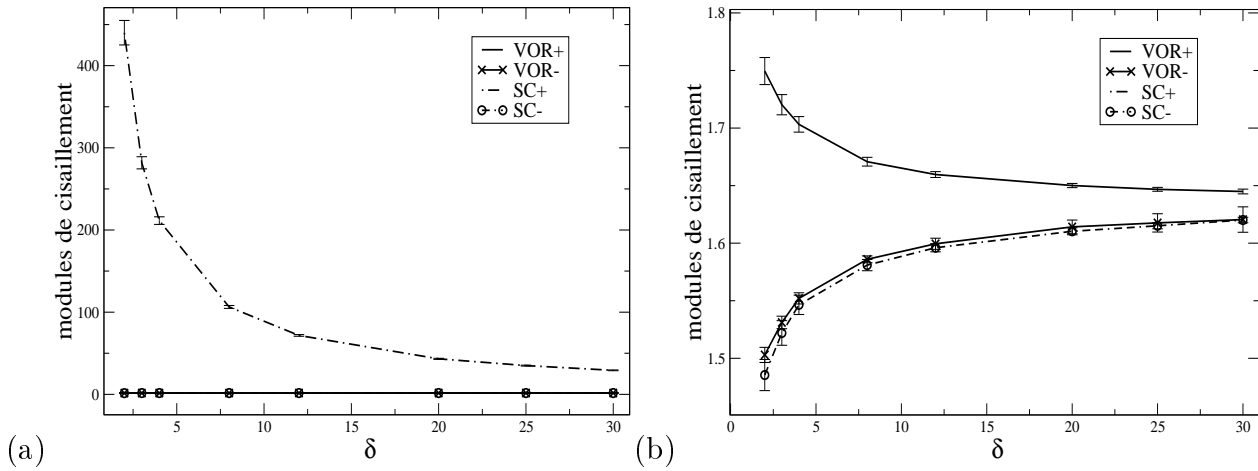


FIGURE 1.26 – Composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$, $f^I = 30\%$) : évolution des bornes de type Huet (SC^+) et de type Voronoï (VOR^+) du module de cisaillement effectif G^{eff} (a) et zoom (b)

l'augmentation de la fraction volumique des inclusions, la diminution de l'hétérogénéité de la microstructure peut induire ou non une diminution des fluctuations du comportement apparent en fonction de la prédominance de l'un ou l'autre des deux phénomènes mentionnés ci-dessus. Par ailleurs, d'autres simulations numériques réalisées pour des fractions volumiques de 10%, 20%, 25% dans le cas de composites renforcés ou de matériaux poreux ont montré que les bornes de type Voronoï améliorent à chaque fois, et de façon significative, les bornes de type Huet.

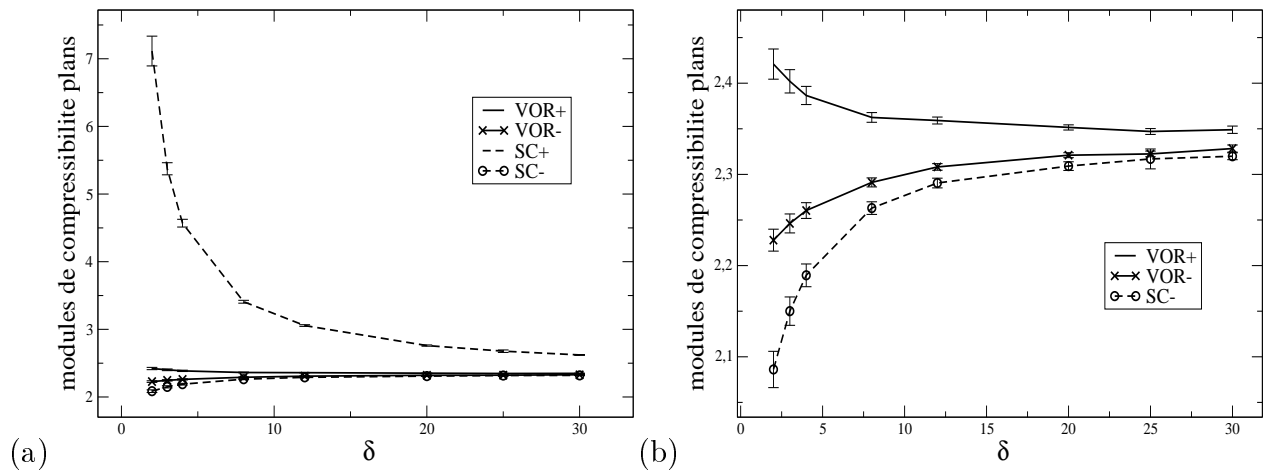


FIGURE 1.27 – Matériau biphasé ($c = 10^2$, $f^I = 15\%$) : évolution en fonction de δ des bornes de type Huet SC^\pm et de type Voronoï VOR^\pm du module de compressibilité plan effectif K^{eff} (a) et zoom (b)

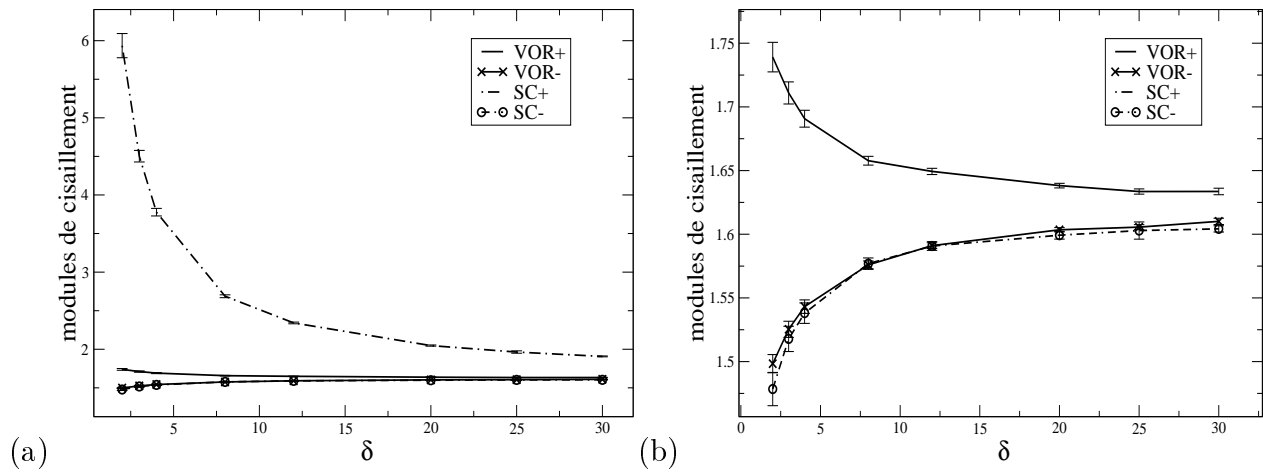


FIGURE 1.28 – Matériau biphasé ($c = 10^2$, $f^I = 30\%$) : évolution en fonction de δ des bornes de type Huet (SC^\pm) et de type Voronoï (VOR^\pm) du module de cisaillement effectif G^{eff} (a) et zoom (b)

Concernant les bornes de type Huet, on constate dans le cas des composites renforcés ($c = 10^4, c = 10^2, 5$) que les bornes supérieures SC^+ pour une fraction volumique de 30% présentent des valeurs qui divergent davantage par comparaison à celles obtenues pour $f^I = 15\%$. L'accentuation de la divergence quand f^I augmente est probablement due au fait que le nombre d'inclusions intersectant le bord du VE (qui sont à l'origine de l'explosion de la borne SC^+) devient plus important quand f^I augmente.

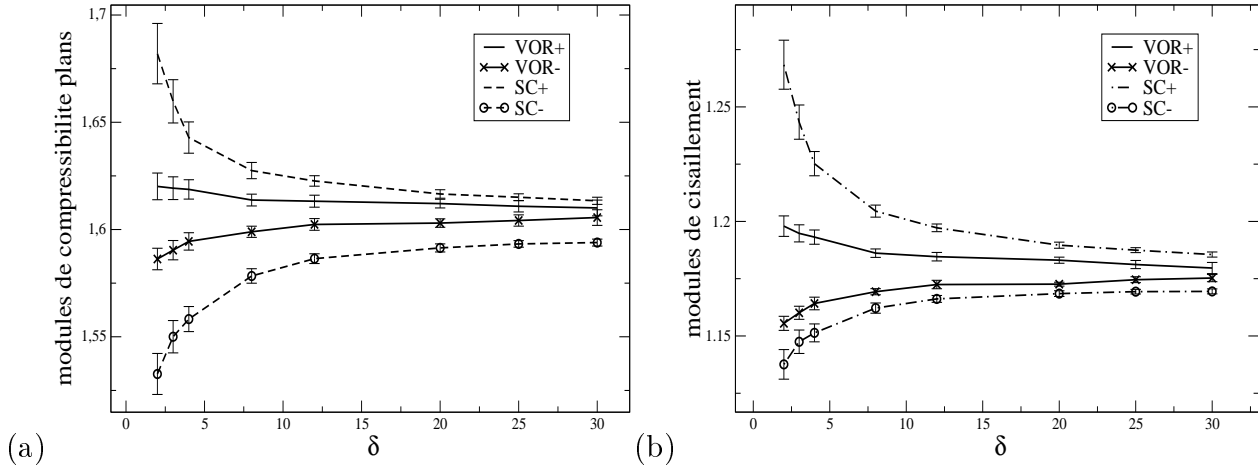


FIGURE 1.29 – Matériau biphasé ($c = 5$, $f^I = 30\%$) : évolution en fonction de δ des bornes de type Huet (SC^+) et de type Voronoï (VOR^+) du module effectif de cisaillement effectif G^{eff} (a) et zoom (b)

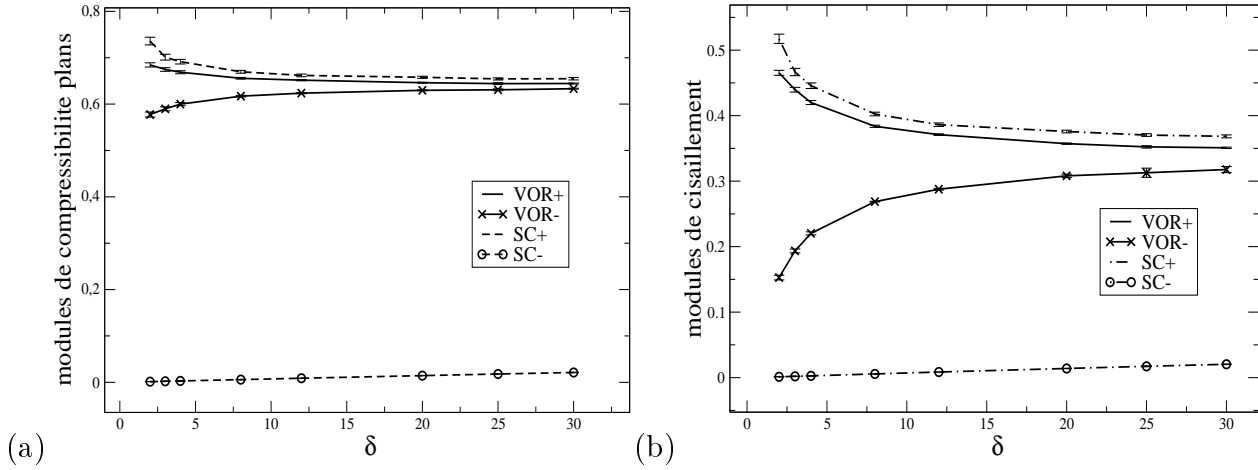


FIGURE 1.30 – Matériau poreux ($c = 10^{-4}$, $f^I = 30\%$) : évolution en fonction de δ des bornes de type Huet (SC^+) et de type Voronoï (VOR^+) du module de compressibilité plan effectif K^{eff} (a) et du module de cisaillement effectif G^{eff} (b)

1.8.4 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une nouvelle approche micromécanique pour le calcul de bornes du comportement effectif d'un composite de type matrice-inclusions dont le comportement des phases est élastique linéaire isotrope. Nous avons basé notre approche sur des VE de calcul, de forme géométrique non-carrée, issus d'un assemblage de cellules de Voronoï, que nous soumettons à des CLDA et à des CLCH. Nous avons modélisé plusieurs

configurations de matériaux présentant plusieurs contrastes allant jusqu'aux contrastes infinis par rapport aux résultats antérieurs. Nous avons également considéré deux fractions volumiques différentes des inclusions afin d'étudier leur influence sur la convergence vers les propriétés effectives ainsi que sur la qualité de nos bornes. Nous obtenons grâce à notre modèle des bornes qui améliorent significativement celles obtenues par l'approche de type Huet, en particulier dans le cas des contrastes infinis. Dans le cas des contrastes finis, l'amélioration des résultats est moins spectaculaire mais la nouvelle approche fournit néanmoins des bornes plus resserrées.

Nous avons commencé par appliquer notre procédure au cas d'un matériau à géométrie simple permettant de ramener le problème mécanique $3D$ à un problème à 2 dimensions, traité dans le cadre des déformations planes, donc numériquement peu coûteux pour sa résolution. En perspective, l'approche présentée au cours de ce chapitre peut s'étendre, moyennant des calculs un peu plus coûteux mais tout à fait réalisables, aux cas de microstructures en $3D$ présentant différents types de distribution (pas forcément isotropes) des inclusions dans la matrice. On peut aussi considérer le cas d'inclusions à formes géométriques plus complexes (ellipses, formes géométriques quelconques, ...). Afin de pouvoir étendre l'approche présentée dans ce chapitre à de nouvelles microstructures $3D$, ces dernières doivent satisfaire la condition fondamentale suivante : les inclusions doivent être déconnectées les unes des autres. Avec ce type de microstructures, il est toujours possible de définir des distances permettant de construire des cellules contenant une unique inclusion entourée de matrice et par concaténation de ces cellules de construire des VE de calcul dont les inclusions n'intersectent jamais le bord.

La relation d'encadrement (1.21) a été prouvée pour le comportement linéaire élastique dans le cadre de petites déformations. Cette relation peut être facilement étendue au cas du comportement élastique non linéaire ou viscoplastique des phases et ce dans le même cadre de petites déformations. En effet, ces lois de comportement dérivent d'un seul potentiel convexe de déformations ou de contraintes sur lequel nous pouvons appliquer les théorèmes de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire que nous avons utilisés afin de prouver la relation (1.21).

Les résultats que nous avons exposés dans ce chapitre montrent que les propriétés effectives des matériaux considérés sont atteintes plus rapidement qu'avec les approches de type Huet en particulier dans le cas de forts contrastes. Nous proposons dans le chapitre suivant une méthode semi-analytique pour le calcul des bornes du comportement effectif,

appliquée au même type de matériaux que ceux considérés précédemment, permettant ainsi de s'affranchir des coûts de calcul importants liés à la détermination des comportements apparents.

Dans les prochains chapitres, l'approche de type Voronoï présentée dans cette première partie en vue d'estimer les bornes du comportement effectif des composites de type matrice-inclusions sera mise à profit pour effectuer une analyse statistique des comportements apparents des VE non-carrés. En se fondant sur les résultats de ces études, de nouveaux critères de VER seront présentés.

Chapitre 2

Comparaison avec l’approche par motifs morphologiques représentatifs

2.1 Objectifs

Comme nous avons pu le voir, les résultats présentés au chapitre 1 améliorent significativement ceux issus de l’approche de Huet [31]. Cependant, les deux approches présentent le même inconvénient : des calculs relativement coûteux en raison de l’utilisation de la méthode des éléments finis (MEF) pour déterminer les comportements apparents. Afin de s’affranchir de cette limitation, nous utilisons dans ce chapitre des méthodes d’homogénéisation en champs moyens analytiques, élaborées pour des comportements élastiques linéaires, afin de construire de nouvelles bornes stochastiques semi-analytiques des comportements apparents associés aux VE non-carrés formés d’assemblages de cellules de Voronoï. Les moyennes d’ensemble de ces bornes stochastiques fourniront de nouvelles bornes semi-analytiques du comportement effectif dont l’obtention ne nécessite aucunement de recourir à des méthodes numériques coûteuses telle que la MEF.

La méthode que nous proposons est basée sur l’approche par « Motifs Morphologiques représentatifs » (MMR) [55, 6] et plus précisément sur l’utilisation d’assemblages généralisés de cylindres composites de Hashin [21, 23] pour représenter la microstructure des VE non-carrés (construits par assemblage de cellules de Voronoï) au sein de l’approche de type Voigt ou Reuss généralisée à une telle description par MMR [6]. Le choix et la pertinence d’une telle description de la microstructure réelle du matériau résulte d’une part du fait que les inclusions sont cylindriques et sans contact entre-elles et d’autre part que les CL associées à

une modélisation de type Voigt ou Reuss MMR peuvent ainsi être appliquées exclusivement sur la matrice et non sur les inclusions s'affranchissant ainsi des limitations observées sur l'approche de Huet.

Dans ce chapitre, préalablement à la présentation des approches par Motifs Morphologiques Représentatifs qui nous servira à construire de nouvelles bornes du comportement effectif, nous commençons par rappeler quelques approches classiques d'homogénéisation en champs moyens pour les composites linéaires élastiques qui seront utilisées en tant que références dans la présentation des résultats. Nous présentons ensuite dans la partie 2.2 les approches par MMR et notamment les modèles qui vont nous servir à construire dans la partie 2.3 de nouvelles bornes stochastiques et déterministes semi-analytiques de type Voigt et Reuss MMR. Puis en 2.4, nous comparons les résultats obtenus avec ces bornes semi-analytiques aux bornes numériques de type Voronoï et de type Huet développées au chapitre 1.

2.2 Rappels sur les approches d'homogénéisation en champs moyens en élasticité linéaire

Soit un composite constitué de m phases r ayant chacune un tenseur de rigidité C^r et un tenseur de souplesse S^r . La détermination des propriétés effectives de ce composite dont chaque phase est élastique linéaire suit la même démarche en 3 étapes que celle utilisée pour le calcul des comportements apparents

- l'étape de localisation $\varepsilon(x) = A(x) : \bar{\varepsilon}$ conduisant aux champs locaux associée à une déformation macroscopique imposée, ou respectivement de concentration $\sigma(x) = B(x) : \bar{\sigma}$ lorsque c'est la contrainte macroscopique que l'on impose
- l'étape de détermination du champ local de contraintes à travers la loi de comportement locale $\sigma(x) = C(x) : \varepsilon(x)$, avec $C(x) = \sum_{r=1}^m \chi^r(x) C^r$, ou respectivement de déformations $\varepsilon(x) = S(x) : \sigma(x)$, avec $S(x) = \sum_{r=1}^m \chi^r(x) S^r$
- l'étape d'homogénéisation

$$\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle = C^{eff} : \bar{\varepsilon}, \text{ avec } C^{eff} = \langle C : A \rangle = \sum_{r=1}^m f^r C^r : A^r \quad (2.1)$$

ou respectivement

$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle = S^{eff} : \bar{\sigma}, \text{ avec } S^{eff} = \langle S : B \rangle = \sum_{r=1}^m f^r C^r : B^r \quad (2.2)$$

Dans (2.1) et (2.2) les tenseurs $A^r = \langle A \rangle_r$ et $B^r = \langle B \rangle_r$ tels que $\bar{\varepsilon}^r = A^r : \bar{\varepsilon}$ et $\bar{\sigma}^r = B^r : \bar{\sigma}$, où $\bar{\varepsilon}^r$ et $\bar{\sigma}^r$ sont respectivement le déformation et la contrainte moyenne sur la phase r , sont connus respectivement sous le nom de tenseur de localisation et tenseur de concentration de la phase r . Comme par construction $\langle A \rangle = \mathbb{1}$ et $\langle B \rangle = \mathbb{1}$ ($\mathbb{1}$ est le tenseur identité d'ordre 4), il est possible de reformuler les relations (2.1) et (2.2) en privilégiant une phase particulière, par exemple la phase connexe matricielle repérée par l'exposant M selon

$$C^{eff} = C^M + \sum_{r=2}^m f^r (C^r - C^M) : A^r \quad (2.3)$$

et

$$S^{eff} = S^M + \sum_{r=2}^m f^r (S^r - S^M) : B^r \quad (2.4)$$

L'unique différence avec le calcul des propriétés apparentes réside dans le fait que les moyennes spatiales sont désormais effectuées sur un VER vérifiant par hypothèse parfaitement la condition de séparation d'échelle. Par conséquent $C^{eff} = (S^{eff})^{-1}$. De plus C^{eff} , A^r et B^r ne dépendent plus ni de la réalisation ω , ni des CL, à condition qu'elles soient macrohomogènes. Il est en particulier possible d'opter pour des CLDA ou des CLCH, sans conséquence sur le résultat.

Ainsi, comme le montrent les formules (2.1) et (2.2) permettant l'évaluation du comportement effectif, la difficulté majeure dans la détermination des propriétés effectives d'un matériau hétérogène réside dans le calcul des tenseurs de localisation moyen par phase A^r (ou les tenseurs de concentration de contraintes B^r).

Quand la microstructure est entièrement connue, il est en principe possible à l'aide de calculs en champs complets d'obtenir une estimation « exacte » à une précision numérique donnée des tenseurs A^r et B^r , selon des principes proches de ceux exposés au chapitre 1. Cependant, dans bien des cas, seules certaines informations statistiques concernant la microstructure sont connues. On ne peut alors qu'obtenir des estimations des tenseurs de localisation ou de concentration qui conduisent à des estimations ou à des bornes du comportement effectif. Les théories d'homogénéisation par champs moyens fournissent, pour des composites élastiques linéaires, des estimations analytiques ou semi-analytiques concernant ces tenseurs associées à différents types de morphologies du matériau considéré.

2.2.1 Bornes de Voigt et Reuss

Les estimations les plus simples des tenseurs A^r et B^r sont celles qui conduisent aux bornes de Voigt [57] et Reuss [49] du comportement effectif. Leur simplicité est liée au fait que la seule information statistique nécessaire à leur détermination est la fraction volumique des phases qui correspond en fait au moment d'ordre 1 $f^r = \langle \chi \rangle_r$ des fonctions caractéristiques des phases, d'où leur qualification d'ordre 1.

Pour les obtenir, on suppose que le champ local de déformation (pour la borne de Voigt) ou de contrainte (pour la borne de Reuss) est uniforme sur tout le volume. Il est par conséquent égal à la déformation $\bar{\varepsilon}$ (Voigt) ou contrainte $\bar{\sigma}$ (Reuss) macroscopique imposée. Il s'en suit que les tenseurs de localisation des déformations A^r sont tous égaux à l'identité $A^r = \mathbb{I} = B^r$. Par conséquent, les estimations de Voigt (C^V) et de Reuss (C^R) des comportements effectifs s'écrivent en se référant aux relations (2.1) et (2.2)

$$\begin{cases} C^V = \sum_{r=1}^m f^r C^r \\ S^R = \sum_{r=1}^m f^r S^r \end{cases} \Leftrightarrow C^R = (S^R)^{-1} = \left(\sum_{r=1}^m f^r (C^r)^{-1} \right)^{-1} \quad (2.5)$$

En utilisant les théorèmes de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire de l'élasticité linéaire, on peut montrer facilement que les tenseurs C^V et C^R sont des bornes supérieure et inférieure, dites de Voigt et Reuss, du comportement effectif au sens des formes quadratiques

$$\left(\sum_{r=1}^m f^r (C^r)^{-1} \right)^{-1} \leq C^{eff} \leq \sum_{r=1}^m f^r C^r \quad (2.6)$$

Ces bornes sont donc très simples à calculer mais fournissent un encadrement relativement grossier des propriétés effectives. Comme nous le verrons au paragraphe 2.2.3 les idées utilisées pour les obtenir peuvent être adaptées à l'approche par MMR conduisant aux bornes de Voigt et Reuss MMR.

2.2.2 Estimations et bornes de Hashin et Shtrikman

Nous rappelons la façon d'obtenir les estimations de Hashin et Shtrikman (HS) du comportement effectif qui coïncident avec les bornes de Hashin et Shtrikman pour un certain choix de milieux infinis. Pour construire ces estimations, on peut s'appuyer sur la résolution de l'inclusion homogène, puis hétérogène, d'Eshelby.

Le problème de l'inclusion homogène d'Eshelby consiste à étudier, dans le cadre de l'élasticité linéaire, l'équilibre mécanique d'une inclusion soumise à une déformation libre, entourée

d'une matrice infinie. L'inclusion et la matrice sont constituées du même matériau. Soit Ω le domaine infini qu'occupe la matrice et I le domaine occupé par l'inclusion. La déformation libre ε^t supposé uniforme dans l'inclusion est celle qu'elle aurait si elle n'était pas entourée de matrice. Il peut par exemple s'agir d'une déformation thermique $\varepsilon^t = \alpha \Delta \theta$ due à une variation de température $\Delta \theta$. Notons par $\varepsilon^I(x)$ la déformation de l'inclusion à l'équilibre et C le tenseur de rigidité d'ordre 4 du milieu étudié.

Considérons tout d'abord le cas où Ω n'est pas soumis à un chargement sur son bord $\partial\Omega$ à l'infini. Eshelby [17] a montré que la déformation dans l'inclusion à l'équilibre est homogène ($\varepsilon^I(x) = \varepsilon^I, \forall x$) et qu'il existe un tenseur d'ordre 4 noté S^E qui dépend de C et de la forme de l'inclusion, dit tenseur d'Eshelby, qui relie ε^I à ε^t par :

$$\varepsilon^I = S^E : \varepsilon^t = -P : \tau \quad (2.7)$$

où $\tau = -C : \varepsilon^t$ désigne la contrainte de polarisation associée à la déformation libre. Le tenseur $P = S^E : C^{-1}$, appelé tenseur de Hill, est symétrique et défini positif. La contrainte $\sigma^I(x)$ dans l'inclusion est également homogène et s'écrit :

$$\sigma^I = C : \varepsilon^I + \tau = C : S^E : \varepsilon^t + \tau \quad (2.8)$$

Cette solution est étendue au cas où le domaine Ω est (asymptotiquement) soumis à un chargement homogène en déformations $\bar{\varepsilon}$ ou en contraintes $\bar{\sigma}$. Les équations (2.7) et (2.8) se réécrivent alors sous la forme

$$\varepsilon^I = \bar{\varepsilon} + S^E : \varepsilon^t = \bar{\varepsilon} - P : \tau \quad (2.9)$$

$$\sigma^I = \bar{\sigma} + C : (S^E - \mathbb{1}) : \varepsilon^t = \bar{\sigma} - C : (S^{E-1} - \mathbb{1}) : S^E : \varepsilon^t \quad (2.10)$$

On en déduit la loi d'interaction

$$\sigma^I - \bar{\sigma} = -C^* : (\varepsilon^I - \bar{\varepsilon}) \quad (2.11)$$

définissant ainsi le tenseur d'influence de Hill $C^* = C : ((S^E)^{-1} - \mathbb{1})$ qui est symétrique et défini positif. Ce dernier caractérise la réaction du milieu infini vis-à-vis de la déformation libre que cherche à lui imposer l'inclusion. Ce tenseur ne dépend que de C et de la forme géométrique de l'inclusion. Nous pouvons aussi l'écrire en fonction du tenseur de Hill sous la forme $C^* = (P)^{-1} - C$.

La contrainte de polarisation τ qui apparaît dans le problème de l'inclusion homogène d'Eshelby induit une hétérogénéité de contrainte identique à celle obtenue dans un problème

connu sous le nom de problème de l'inclusion hétérogène, ce dernier concernant une inclusion hétérogène de rigidité C^H située dans une matrice infinie de rigidité différente C et soumise à une déformation homogène $\bar{\varepsilon}$ à l'infini. La présence de l'inclusion induit une perturbation de ce champ homogène. Ce second problème s'avère équivalent au premier. En effet, soient $\varepsilon^H(x)$ et $\sigma^H(x)$ respectivement les tenseurs de déformation et de contrainte locaux à l'état d'équilibre dans l'inclusion hétérogène. Dans le premier et le second problème, les champs de contrainte vérifiant l'équilibre satisfont les relations de comportement local qui s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} \sigma(x) = C : \varepsilon(x), & \forall x \in \Omega \setminus I \\ \sigma^I = C : \varepsilon^I + \tau, & \forall x \in I \end{cases} \quad (2.12)$$

et

$$\begin{cases} \sigma(x) = C : \varepsilon(x), & \forall x \in \Omega \setminus I \\ \sigma^H(x) = C^H : \varepsilon^H(x) = C : \varepsilon^H(x) + (C^H - C) : \varepsilon^H(x), & \forall x \in I \end{cases} \quad (2.13)$$

Pour que les solutions de (2.12) et (2.13) coïncident, il suffit que

$$\varepsilon^H(x) = \varepsilon^H = \varepsilon^I \text{ et } \tau = (C^H - C) : \varepsilon^H \quad (2.14)$$

Ceci est possible du fait de l'homogénéité des champs dans l'inclusion du premier problème. En revenant à l'expression (2.2) de la solution ε^I de ce dernier, on en déduit :

$$\varepsilon^H = \bar{\varepsilon} - P : (C^H - C) : \varepsilon^H = (I + P : (C^H - C))^{-1} : \bar{\varepsilon} \quad (2.15)$$

D'où l'expression du tenseur de « localisation » A^H au sein de l'hétérogénéité, faisant le lien entre la déformation à l'infini et celle dans l'inclusion dans le second problème :

$$A^H = (\mathbb{I} + P : (C^H - C))^{-1}. \quad (2.16)$$

Dans certains cas particuliers tel que celui d'une inclusion sphérique au sein d'une matrice isotrope, la résolution du problème permet d'avoir des expressions entièrement analytiques pour S^E , P , C^* et A^H . En particulier, le tenseur d'Eshelby s'exprime en fonction des modules de compressibilité k et de cisaillement μ de la matrice $C = 3kJ + 2\mu K$ par :

$$S^E = \left\{ \frac{3k}{3k + 4\mu}, \frac{6(k + 2\mu)}{5(3k + 4\mu)} \right\}. \quad (2.17)$$

Les estimations et bornes de Hashin et Shtrikman [24] peuvent s'obtenir à partir de la résolution du problème de l'inclusion hétérogène pour un choix particulier du milieu infini entourant des inclusions hétérogènes qui représentent les diverses phases constitutives du

composite. La déformation (ou contrainte) moyenne de chaque phase du composite réel est assimilée à la déformation (ou à la contrainte) uniforme d'une hétérogénéité sphérique, de mêmes modules que la phase, immergée dans une matrice homogène de module adéquat C^0 et soumise à une déformation ε_0 (ou contrainte) adéquate. Au vu du problème de l'inhomogénéité, la déformation moyenne de la phase r peut ainsi être estimée par

$$\bar{\varepsilon}^r = (\mathbb{1} + P^0 : (C^r - C^0))^{-1} : \varepsilon^0 \quad (2.18)$$

Or

$$\langle \varepsilon \rangle = \bar{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^0 = \left\langle (\mathbb{1} + P^0 : (C - C^0))^{-1} \right\rangle^{-1} : \bar{\varepsilon} \quad (2.19)$$

D'où

$$\bar{\varepsilon}^r = A^r : \bar{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad A^r = [\mathbb{1} + P^0 : (C^r - C^0)]^{-1} : \left\langle (\mathbb{1} + P^0 : (C - C^0))^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.20)$$

Par conséquent,

$$C^{HS}(C^0) = \left\langle C : [\mathbb{1} + P^0 : (C - C^0)]^{-1} \right\rangle : \left\langle [\mathbb{1} + P^0 : (C - C^0)]^{-1} \right\rangle^{-1} \quad (2.21)$$

Le tenseur $C^{HS}(C^0)$ associé à un milieu infini C^0 correspond à ce que l'on appelle l'estimation de Hashin et Shtrikman du tenseur des modules effectifs. Lorsque le milieu infini correspond au plus petit (au sens des formes quadratiques) tenseur C_+^0 ou au plus grand tenseur C_-^0 tels que

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} : C_+^0 : \bar{\varepsilon} \geq \text{Max}_r (\bar{\varepsilon} : C^r : \bar{\varepsilon}) \\ \bar{\varepsilon} : C_-^0 : \bar{\varepsilon} \leq \text{Min}_r (\bar{\varepsilon} : C^r : \bar{\varepsilon}) \end{cases} \quad \forall \bar{\varepsilon} \quad (2.22)$$

et sous l'hypothèse d'une distribution spatiale isotrope des phases constitutives du composite, Hashin et Shtrikman [24] ont montré, à partir de leur approche variationnelle, que $C^{HS+} = C^{HS}(C_+^0)$ et $C^{HS-} = C^{HS}(C_-^0)$ sont respectivement des bornes supérieure et inférieure (dites de Hashin et Shtrikman) du comportement effectif. Au travers de l'approche énergétique formulée par Hashin et Shtrikman, la forme sphérique associée aux inclusions dans le problème d'inhomogénéité est associée à l'hypothèse de distribution isotrope des phases selon laquelle la fonction de corrélation à deux points des phases $\varphi_{rs}(x) = \langle \chi_r(\cdot) \chi_s(\cdot + x) \rangle$ ne dépend que de la norme de x : $\varphi_{rs}(x) = \chi_{rs}(|x|)$. Comme cette hypothèse porte sur les moments d'ordre 2 des fonctions caractéristiques des phases, les bornes de Hashin et Shtrikman sont dites d'ordre 2. Etant donné qu'elles prennent en compte une information statistique plus riche que les bornes de Voigt et Reuss, à savoir cette hypothèse d'isotropie de la fonction de corrélation à deux points, les bornes de HS améliorent toujours ou sont au moins aussi performantes que ces dernières.

2.2.3 Les approches par Motifs Morphologiques Représentatifs

Dans cette partie nous présentons l'approche par Motifs Morphologiques Représentatifs (MMR) introduite par Stolz et Zaoui [55], puis développée par Bornert et al. [5, 6], sur laquelle nous nous appuyons pour construire de nouvelles bornes semi-analytiques des comportements apparents et effectif. L'avantage de cette méthode par rapport aux approches classiques présentées précédemment réside dans le fait qu'elle prend en compte des informations microstructurales absentes dans les approches classiques telles que la continuité ou la discontinuité des phases, la disposition des inclusions dans une matrice, la fluctuation spatiale des fractions volumiques locales, permettant ainsi d'obtenir des estimations ou des bornes du comportement effectif de meilleure qualité.

L'approche par MMR [55] concerne les milieux hétérogènes qui peuvent être décomposés en un ensemble de motifs, qui sont des familles de domaines composites finis dont la composition est connue. Dans chaque motif λ , on peut considérer des points homologues, par exemple les centres des motifs X_λ^k , qui possèdent la même position relative dans les N_λ différents domaines D_λ^k . Pour un matériau élastique de module d'élasticité $C(x)$, si $y = X_\lambda^k + x \in D_\lambda^k$, alors $y' = y + X_\lambda^l - X_\lambda^k = X_\lambda^l + x \in D_\lambda^l$ et $C(y) = C(y')$, c'est-à-dire $C(X_\lambda^k + x) = C(X_\lambda^l + x)$. Un motif λ est défini par un domaine centré à l'origine, noté par exemple D_λ , de volume V_λ , par la distribution spatiale des modules locaux dans ce domaine (i.e. $C_\lambda(x)$, $\forall x \in D_\lambda$), par la fraction volumique c_λ de la réunion de ses domaines dans le VER et par les positions X_λ^k des centres des motifs dans le VER. Le matériau hétérogène est complètement caractérisé par la description de tous ses motifs ainsi que par la distribution des centres $X_\lambda^k, \forall k \in [1, N_\lambda]$, $\forall \lambda \in [1, P]$, P étant le nombre de motifs.

Quand la réunion des domaines de tous les motifs recouvre tout le VER, la microstructure de ce dernier est totalement déterminée, et peut être considérée comme un assemblage de motifs de Hashin généralisé. Ceci n'est cependant pas forcément le cas [4]. Quand les motifs ne recouvrent pas complètement le VER, on suppose que le domaine environnant, noté D_0 , est occupé par une phase homogène de fraction volumique c_0 et de module $C_0 = S_0^{-1}$, qui peut être décrite par un motif homogène additionnel.

Dans le cas de CL homogènes appliquées au VER, des bornes de Voigt et Reuss généralisées peuvent être calculées facilement en transférant ces CL au bord de chaque domaine D_λ^k , à savoir

$$u'_\lambda(x) = \bar{\varepsilon} \cdot x \text{ ou } \sigma'_\lambda(x) \cdot n_\lambda(x) = \bar{\sigma} \cdot n_\lambda(x), x \in \partial D_\lambda^k, \forall k \in [1, N_\lambda], \forall \lambda \in [1, P] \quad (2.23)$$

où $u'_\lambda(x)$ et $\sigma'_\lambda(x)$ sont respectivement des champs cinématiquement (CCA) et statiquement (CSA) admissibles et n_λ est le vecteur unitaire normal à ∂D_λ . Dans la matrice environnante, ces champs sont prolongés par des CCA et CSA homogènes classiquement utilisés pour les bornes de Voigt et Reuss : $u'_\lambda(x) = \bar{\varepsilon} \cdot x$ et $\sigma'_\lambda(x) = \bar{\sigma}$ pour $x \in D_0$. Une fois calculées (numériquement ou analytiquement) les solutions correspondantes $\varepsilon'_\lambda(x)$ et $\sigma'_\lambda(x)$ dans D_λ , $\forall \lambda$, la borne de Voigt C_{MMR}^V du module effectif et celle de Reuss S_{MMR}^R de la souplesse effective s'en déduisent

$$C_{MMR}^V \geq C^{eff}, C_{MMR}^V : \bar{\varepsilon} = \langle C : \varepsilon' \rangle = c_0 C_0 : \bar{\varepsilon} + \sum_{\lambda=1}^P c_\lambda \langle C_\lambda : \varepsilon'_\lambda \rangle_{D_\lambda} \quad \forall \bar{\varepsilon} \quad (2.24)$$

$$(S_{MMR}^R)^{-1} \leq C^{eff}, S_{MMR}^R : \bar{\sigma} = \langle S : \sigma' \rangle = c_0 S_0 : \bar{\sigma} + \sum_{\lambda=1}^P c_\lambda \langle S_\lambda : \sigma'_\lambda \rangle_{D_\lambda} \quad \forall \bar{\sigma} \quad (2.25)$$

où $S_\lambda(x)$ est le tenseur des souplesses local et $\langle a \rangle_{D_\lambda}$ la moyenne spatiale de a sur le domaine D_λ .

Afin de construire des bornes ou des estimations plus resserrées du comportement effectif des matériaux hétérogènes à comportement linéaire, Stolz et Zaoui [55] ont utilisé l'approche variationnelle classique de Hashin et Shtrikman [24] avec des champs de polarisation non uniformes p^* dans les domaines, mais qui prennent la même valeur aux points homologues de chaque motif λ

$$p_\lambda^*(x) = p^*(x + X_\lambda^k) \quad \forall x \in D_\lambda, \quad \forall k, \quad \forall \lambda. \quad (2.26)$$

Un champ de polarisation homogène classique p_0^* est utilisé dans la matrice en dehors des motifs. Ces champs engendrent des champs de déformation $\varepsilon^*(p^*)$ et de contrainte $\sigma^* = C^0 : \varepsilon^*(p^*) + p^*$ au sein d'un milieu homogène de référence fictif de modules élastiques arbitraires C^0 et de mêmes géométrie et conditions aux limites que le VER actuel. Les champs $\varepsilon^*(p^*)$ et $\sigma^*(p^*)$ peuvent être utilisés comme champs d'essai pour le problème initial. Ils sont introduits dans la fonctionnelle de Hashin et Shtrikman HS^0

$$2HS^0(p^*, \bar{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon} : C^0 : \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon} : \langle p^* \rangle + \langle \varepsilon^*(p^*) : p^* \rangle - \langle p^* : (\delta C^0)^{-1} : p^* \rangle \quad (2.27)$$

qui fournit des bornes supérieure et inférieure à l'énergie de déformation linéaire effective $W(\bar{\varepsilon})$ du problème initial pour chaque choix de p^* quand les modules C^0 sont choisis de façon appropriée : si $\delta C^0 = [C(x) - C^0]$ est soit défini négatif, soit défini positif en tout point x appartenant au VR V , alors HS^0 fournit une borne supérieure ou inférieure de $W(\bar{\varepsilon})$. Sous hypothèse de macrohomogénéité, les champs de déformation ε^* et de contrainte σ^* sont

obtenus à partir des techniques de Green et de l'opérateur de Green modifié en déformations $\Gamma(x - x')$ d'un milieu infini de module C^0 selon l'équation

$$\varepsilon^*(x) = \bar{\varepsilon} - \int_V \Gamma^0(x - x') : \left(p^*(x') - \langle p^* \rangle \right) d\omega(x') \quad (2.28)$$

qui garantit la condition de moyenne $\langle \varepsilon^* \rangle = \bar{\varepsilon}$.

On obtient alors les bornes optimales lorsque les champs de polarisation sont choisis de façon à minimiser ou maximiser la fonction HS^0 . Afin de construire des bornes explicites, on utilise la notion de valeurs moyennes par motif, notées $f_\lambda^M(x)$ pour le motif λ et telles que, pour tout champ $f(x)$ défini sur V :

$$f_\lambda^M(x) = \frac{1}{N_\lambda} \sum_{k=1}^{N_\lambda} f(x + X_\lambda^k), \quad \forall \lambda. \quad (2.29)$$

Les champs de polarisation optimaux p vérifient $p_\lambda(x) = (C_\lambda(x) - C^0) : \varepsilon(p)_\lambda^M(x)$, $\forall x \in D_\lambda$, pour tous les motifs λ et $p_0 = (C_0 - C^0) : \langle \varepsilon(p) \rangle_0$, où $\langle \varepsilon(p) \rangle_0$ représente la moyenne spatiale de $\varepsilon(p)$ dans la matrice en dehors des motifs.

Sous hypothèse d'une distribution ellipsoïdale des centres des domaines, Bornert et al [6] ont montré que les déformations moyennes optimales par motif sont les solutions des problèmes d'hétérogénéité d'Eshelby, où la matrice infinie, soumise à la même déformation uniforme $\bar{\varepsilon}$ à l'infini, a pour modules C^0 et où les hétérogénéités composites sont constituées par les différents motifs. Dans ces conditions, il est également montré qu'il est pertinent (et possible) de choisir des motifs dont la forme extérieure est ellipsoïdale, de rapport de forme et d'orientation associée à la symétrie de la distribution. L'éventuelle matrice entourant les motifs est traitée comme un motif supplémentaire homogène et de même forme. Les équations régissant le problème s'écrivent alors, pour les champs dans les motifs :

$$\forall \lambda \in [1, P], \forall x \in D_\lambda, \varepsilon_\lambda^M(x) = \varepsilon^0 - \int_{D_\lambda} \Gamma^0(x - x') \left(C_\lambda(x') - C^0 \right) : \varepsilon_\lambda^M(x') d\omega(x') \quad (2.30)$$

Pour la déformation moyenne ε_0 dans la matrice résiduelle, l'équation classique de l'hétérogénéité d'Eshelby qui la relie à la déformation à l'infini ε^0 est retrouvée. La déformation ε^0 est déterminée par la condition $c_0 \varepsilon_0 + \sum_{\lambda=1}^P c_\lambda \langle \varepsilon_\lambda^M \rangle_{D_\lambda} = \bar{\varepsilon}$. Dans le cas d'une distribution isotrope des centres des motifs (comme cela est considéré dans la suite de ce mémoire), une description cohérente de la microstructure consiste à attribuer une forme sphérique à la frontière extérieure des motifs morphologiques D_λ , même si cette condition n'est pas absolument nécessaire lorsque la fraction volumique de la matrice restante n'est pas nulle.

Finalement, le tenseur généralisé des modules élastiques de Hashin et Shtrikman C_{MMR}^{HS} associé à un milieu de référence C^0 s'identifie à partir des relations suivantes

$$\forall \bar{\varepsilon}, C_{MMR}^{HS}(C^0) : \bar{\varepsilon} = c_0 C_0 \varepsilon_0 + \sum_{\lambda=1}^P c_\lambda \langle C_\lambda : \varepsilon_\lambda^M \rangle_{D_\lambda} \quad (2.31)$$

C'est une borne supérieure ou inférieure du tenseur des modules effectifs lorsque C^0 est choisi tel que $\delta C(x) = C(x) - C^0$ est défini négatif ou positif $\forall x \in V$. Il est aussi possible de définir des estimations Auto-Cohérentes (AC) généralisées C_{MMR}^{AC} comme solutions de l'équation implicite $C_{MMR}^{HS}(C_{MMR}^{AC}) = C_{MMR}^{AC}$ qui se résout aisément de manière itérative.

Dans le cas classique de l'Assemblage de Sphères Composites (ASC) de Hashin [21] (ou l'Assemblage de Cylindres Composites (ACC) de Hashin dans le cas 2D), où toutes les sphères (ou cylindres) composites ayant le même diamètre définissent le même motif, et sous hypothèse de distribution isotrope (3D ou 2D suivant le cas) des centres des sphères composites, les différents problèmes d'inhomogénéité d'Eshelby généralisés sont identiques car les différents motifs ont tous la même fraction volumique d'inclusion. De nouvelles bornes de type Hashin et Shtrikman généralisées connues sous le nom de HSZ peuvent ainsi être obtenues analytiquement (Hervé et al. [27]). Les estimations AC généralisées associées à un ASC de Hashin correspondent aux estimations de Christensen et Lo [11]. Enfin les bornes de Voigt et Reuss MMR associées à un ASC ou à un ACC de Hashin correspondent respectivement aux bornes de Hashin [21] (pour l'ASC) et de Hashin et Rosen [23] (pour l'ACC). Contrairement aux bornes HSZ, les bornes de Hashin et de Hashin et Rosen n'ont pas besoin de l'hypothèse d'une distribution isotrope des centres des sphères ou des cylindres pour être établies. Elles correspondent en fait aux bornes de Voigt et Reuss généralisées introduites plus haut appliquées à cette microstructure particulière.

Nous rappelons ci-dessous les expressions analytiques des bornes de Hashin et Rosen pour un ACC de Hashin qui vont nous servir au paragraphe suivant pour établir de nouvelles bornes généralisées de type Voigt et Reuss des comportements apparents et effectif des composites considérés dans cette étude. Les bornes supérieure et inférieure de Hashin et Rosen du comportement effectif de l'ACC s'obtiennent en calculant le comportement apparent d'un cylindre composite de fraction volumique d'inclusion v_i soumis respectivement à une déformation et une contrainte homogène, dans le contexte des déformations planes.

Dans le cas d'un chargement sphérique, les deux bornes (inférieure et supérieure) du module de compressibilité plane $K = k + \frac{\mu}{3}$ coïncident et correspondent au module effectif de compressibilité plane de l'ACC. L'expression du module effectif de compressibilité plane

est donnée par

$$K^{eff} = K^{HR} = \frac{K^M (K^I + \mu^M) - v_i \mu^M (K^M - K^I)}{(K^I + \mu^M) + v_i (K^M - K^I)} \quad (2.32)$$

où

- K^M et μ^M sont respectivement le module de compressibilité plan et de cisaillement de la matrice,
- $K^I = cK^M$ désigne le module de compressibilité plan de l'inclusion, c désigne le contraste entre l'inclusion et la matrice,
- $v_i = \frac{r^2}{r_i^2}$ et $v_M = 1 - v_i$ représentent respectivement la fraction volumique de l'inclusion de rayon r , et celle de la matrice, dans le cylindre composite de Hashin de rayon r_i .

L'application d'un chargement déviatorique en déformation et contrainte homogène sur l'inclusion composite permet d'obtenir les bornes inférieure et supérieure de Hashin et Rosen (μ^{HR-} et μ^{HR+}) du module de cisaillement transverse effectif μ^{eff} sous la forme

$$\frac{\mu^{HR+}}{\mu^M} = 1 + v_i \frac{1 + \beta^M}{\frac{\mu^I + \mu^M \beta^M}{\mu^I - \mu^M} - v_i \left(1 + 3(1 - v_i)^2 \beta^{M2} \frac{1}{1 + \alpha v_i^3} \right)} \quad (2.33)$$

$$\frac{\mu^{HR-}}{\mu^M} = 1 + v_i \frac{1 + \beta^M}{\frac{\mu^I + \mu^M \beta^M}{\mu^I - \mu^M} - v_i \left(1 - 3(1 - v_i)^2 \beta^{M2} \frac{1}{\beta^M - \alpha v_i^3} \right)} \quad (2.34)$$

avec

- $\beta^M = \frac{K^M}{K^M + 2\mu^M}$, $\beta^I = \frac{K^I}{K^I + 2\mu^I}$ et $\alpha = \frac{\mu^M \beta^M - \mu^I \beta^I}{\mu^M + \mu^I \beta^I}$
- μ^M et μ^I respectivement le module de cisaillement de la matrice et de l'inclusion et K^M et K^I le module de compressibilité plan de la matrice et de l'inclusion.

2.3 Nouvelles bornes généralisées de type Voigt et Reuss

Nous nous proposons dans ce qui suit d'utiliser le principe de l'approche par MMR afin de construire des bornes semi-analytiques des comportements apparents et effectif des VE non-carrés issus des cellules de Voronoï dont l'obtention ne nécessite aucun calcul par éléments finis. Pour cela, nous construisons pour chaque VE un assemblage de Hashin généralisé d'extension finie (correspondant au domaine du VE) et calculons les bornes généralisées de type Voigt et Reuss MMR associées à cet assemblage, ce qui revient à appliquer directement à la frontière de chaque motif des CL en déplacement affine ou en contrainte uniforme.

Pour construire un assemblage de Hashin généralisé d'extension finie associé à un VE $B_\delta(\omega)$ donné, nous utilisons la décomposition de ce dernier en $n_\delta(\omega)$ cellules de Voronoï

d'indice λ ($1 \leq \lambda \leq n_\delta(\omega)$). On remarquera que la décomposition en cellules de Voronoï du VE $B_\delta(\omega)$ est issue directement de la décomposition en cellules de Voronoï de la grande microstructure $B_\delta(\omega)$ assimilée à un VER. A chaque cellule de Voronoï λ (constituée comme nous l'avons vu au chapitre 1 d'une unique inclusion entourée de matrice), nous associons le MMR λ formé du plus grand cylindre composite de Hashin inscrit dans la cellule de Voronoï λ et dont le centre coïncide avec celui de l'inclusion de la cellule de Voronoï (voir figure 2.1) - un cylindre composite de Hashin étant constitué par définition d'une inclusion cylindrique entourée d'une couche de matrice cylindrique. Un VE $B_\delta(\omega)$ est ainsi constitué de $n_\delta(\omega)$ MMR auxquels nous affectons l'indice λ ($1 \leq \lambda \leq n_\delta(\omega)$) et de la matrice restante n'appartenant à aucun des $n_\delta(\omega)$ MMR. Chaque MMR λ contient une et une seule inclusion de rayon $d/2$ entourée d'une couche cylindrique de matrice de rayon extérieur $r_\lambda(\omega)$, dont la valeur est fournie numériquement par la décomposition en cellules de Voronoï du VE $B_\delta(\omega)$ et dépend donc de la réalisation ω . La valeur de $r_\lambda(\omega)$ correspond à la plus petite des distances qui séparent le centre de l'inclusion des arrêtes de la cellule de Voronoï contenant le MMR λ . Chaque motif est caractérisé par sa fraction volumique d'inclusion $v_\lambda(\omega) = \left(\frac{d}{2r_\lambda(\omega)}\right)^2$ associée au cylindre composite de Hashin et par sa fraction volumique locale $f_{\delta,\lambda}(\omega) = \frac{\pi r_\lambda(\omega)^2}{V_\delta(\omega)}$ au sein du VE $B_\delta(\omega)$.

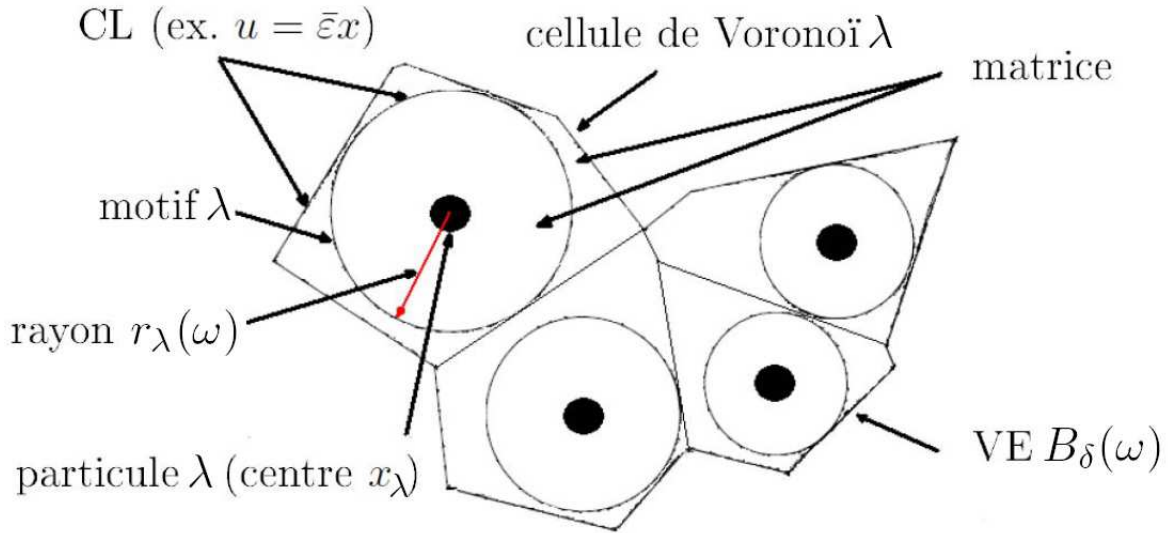


FIGURE 2.1 – Construction de l'Assemblage de Hashin généralisé associé à un VE $B_\delta(\omega)$ de type Voronoï

Aux $n_\delta(\omega)$ motifs associés aux cellules de Voronoï constituant le VE $B_\delta(\omega)$, nous ajoutons un motif supplémentaire homogène constitué uniquement de la matrice restante du VE $B_\delta(\omega)$

non prise en compte dans les cylindres composites. La fraction volumique de ce motif de matrice qui dépend non seulement de la réalisation ω mais aussi du VE $B_\delta(\omega)$ considéré est donnée par $f_\delta^M(\omega) = 1 - \sum_{\lambda=1}^{n_\delta(\omega)} f_{\delta,\lambda}(\omega)$. Ainsi la microstructure réelle de chaque VE $B_\delta(\omega)$ peut être représentée de façon exacte par cet assemblage de cylindres composites généralisé à extension finie constitué de $n_\delta(\omega) + 1$ motifs (les $n_\delta(\omega)$ cylindres composites + 1 motif homogène de matrice).

Pour évaluer le comportement apparent d'un VE $B_\delta(\omega)$, nous appliquons des CLDA ou des CLCH, ce qui revient à calculer respectivement les bornes motifs de type Voigt et Reuss associées à l'assemblage de Hashin généralisé à extension finie construit au paragraphe précédent des comportements apparents $C_\delta^d(\omega)$ et $S_\delta^t(\omega)$ introduits au paragraphe 1.4. Au vu des expressions (2.24) et (2.25), on obtient

$$\begin{cases} C_\delta^d(\omega) \leq C_{\delta,MMR}^V(\omega) = f_\delta^M(\omega)C^M + \sum_{\lambda=1}^{n_\delta(\omega)} f_{\delta,\lambda}(\omega)C^{H+}(v_\lambda(\omega)) \\ S_\delta^t(\omega) \leq S_{\delta,MMR}^R(\omega) = f_\delta^M(\omega)S^M + \sum_{\lambda=1}^{n_\delta(\omega)} f_{\delta,\lambda}(\omega)S^{H-}(v_\lambda(\omega)) \end{cases} \quad (2.35)$$

où $C^{H+}(v_\lambda(\omega))$ et $S^{H-}(v_\lambda(\omega))$ représentent les bornes de Hashin et Rosen de l'assemblage du cylindre composite de fraction volumique locale d'inclusion $v_\lambda(\omega)$.

Par ailleurs, si l'on note par $C_\delta^{app}(\omega)$ le comportement apparent du VE $V_\delta(\omega)$ pour des CL indéterminées, Hazanov et Huet [25] ont montré, sous l'hypothèse d'un chargement macrohomogène [29], que $C_\delta^{app}(\omega)$ admettait l'encadrement suivant

$$[S_\delta^t(\omega)]^{-1} \leq C_\delta^{app}(\omega) \leq C_\delta^d(\omega). \quad (2.36)$$

Au vu des relations (2.35), on obtient les relations d'ordre suivantes

$$\begin{aligned} \left[f_\delta^M(\omega)S^M + \sum_{\lambda=1}^{n_\delta(\omega)} f_{\delta,\lambda}(\omega)S^{H-}(v_\lambda(\omega)) \right]^{-1} &= C_{\delta,MMR}^R(\omega) \leq [S_\delta^t(\omega)]^{-1} \leq C_\delta^{app}(\omega) \\ &\leq C_\delta^d(\omega) \leq C_{\delta,MMR}^V(\omega) = f_\delta^M(\omega)C^M + \sum_{\lambda=1}^{n_\delta(\omega)} f_{\delta,\lambda}(\omega)C^{H+}(v_\lambda(\omega)) \end{aligned} \quad (2.37)$$

pour le comportement apparent $C_\delta^{app}(\omega)$. Ces relations d'ordre sont valables quelles que soient les CL appliquées au VE $B_\delta(\omega)$. Ainsi, les inégalités (2.37) fournissent des bornes stochastiques $C_{\delta,MMR}^V$ et $C_{\delta,MMR}^R$ (car dépendant de la réalisation ω) de type Voigt et Reuss MMR du comportement apparent $C_\delta^{app}(\omega)$.

Quand on projette les inégalités (2.37) sur J_T et K_T , on obtient les bornes suivantes pour les modules plans de compressibilité $K_\delta^{app}(\omega)$ ou de cisaillement $G_\delta^{app}(\omega)$ apparent

$$\begin{aligned} \left(\frac{f_\delta^M(\omega)}{K^M} + \sum_{\lambda=1}^{n_\delta(\omega)} \frac{f_{\delta,\lambda}(\omega)}{K^{H+}(v_\lambda(\omega))} \right)^{-1} &= K_{\delta,MMR}^R(\omega) \leq K_\delta^t(\omega) \leq K_\delta^{app}(\omega) \leq K_\delta^d(\omega) \\ &\leq K_{\delta,MMR,m}^V(\omega) = f_\delta^M(\omega)K^M + \sum_{\lambda=1}^{n_\delta(\omega)} f_{\delta,\lambda}(\omega)K^{H+}(v_\lambda(\omega)) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{f_\delta^M(\omega)}{\mu^M} + \sum_{\lambda=1}^{n_\delta(\omega)} \frac{f_{\delta,\lambda}(\omega)}{\mu^{H^-(v_\lambda(\omega))}} \right)^{-1} &= G_{\delta,MMR}^R(\omega) \leq G_\delta^t(\omega) \leq G_\delta^{app}(\omega) \leq G_\delta^d(\omega) \\ &\leq G_{\delta,MMR}^V(\omega) = f_\delta^M(\omega)\mu^M + \sum_{\lambda=1}^{n_\delta(\omega)} f_{\delta,\lambda}(\omega)\mu^{H^+(v_\lambda(\omega))} \end{aligned} \quad (2.39)$$

où $K_\delta^{app}(\omega) = \frac{C_\delta^{app}(\omega)::J_T}{2}$ et $G_\delta^{app}(\omega) = \frac{C_\delta^{app}(\omega)::K_T}{4}$.

On notera que le calcul des bornes stochastiques de type Voigt et Reuss MMR $C_{\delta,MMR}^V(\omega)$ et $C_{\delta,MMR}^R(\omega)$ des comportements apparents est entièrement analytique à l'exception du calcul des rayons $r_\lambda(\omega)$ des motifs qui sont obtenus numériquement lors de la réalisation de la partition de Voronoï. Ces bornes sont donc beaucoup plus faciles et rapides à calculer que les bornes $C_\delta^d(\omega)$ et $S_\delta^t(\omega)$ du comportement apparent $C_\delta^{app}(\omega)$ qui nécessitent pour chaque tenseur des modules la résolution de 3 calculs EF.

L'originalité de la relation (2.37) réside dans le fait que des bornes non déterministes mais aléatoires (car dépendant de ω) du comportement apparent sont obtenues à partir de relations quasi-analytiques, où seules les fractions volumiques locales d'inclusions $v_\lambda(\omega)$ doivent être calculées.

Les relations (2.37) permettent aussi d'obtenir de nouvelles bornes, cette fois-ci déterministes, du comportement effectif C^{eff} . En effet, en effectuant des moyennes d'ensemble (pondérées par les poids $\frac{V_\delta}{E(V_\delta)}$) sur les inégalités (2.37) conjointement la relation (1.21), on obtient

$$[E(S_{\delta,MMR}^R)]^{-1} \leq [E(S_\delta^t)]^{-1} \leq C^{eff} \leq E(C_\delta^d) \leq E(C_{\delta,MMR}^V) \quad (2.40)$$

où $S_{\delta,MMR}^R(\omega) = (C_{\delta,MMR}^R(\omega))^{-1}$. On remarquera que la relation d'ordre (2.40) portant sur les inverses des moyennes d'ensemble des souplesses est en fait obtenue en partant de (2.37) appliquée aux souplesses $S_\delta^t(\omega)$ (c'est-à-dire $S_\delta^t(\omega) \leq S_{\delta,MMR}^t(\omega)$ et non à leurs inverses).

Par ailleurs, en se rappelant que chaque borne $C_{\delta,MMR}^{V,R}(\omega)$ est issue de l'application directe de CL en déplacement affine ou en contrainte homogène sur la frontière des motifs constituant le VE $B_\delta(\omega)$, c'est-à-dire sur les disques inscrits dans les cellules de Voronoï constituant le VE, on remarque que calculer les moyennes d'ensemble des bornes $C_{\delta,MMR}^{V,R}$ (en pondérant chaque réalisation ω par son poids $\frac{V_\delta}{E(V_\delta)}$) revient à calculer les bornes $C_{MMR}^{V,R}$ issues de l'application directe des CL en déplacement affine ou en contrainte homogène sur l'ensemble des motifs constituant la totalité de la microstructure, c'est-à-dire sur l'ensemble des disques inscrits dans les cellules de Voronoï provenant de la très grande microstructure initiale $B(\omega)$ (assimilée à un VER), où l'on extrait les n VE $B_\delta(\omega)$ et sur le motif de matrice restante.

Par conséquent

$$\begin{cases} E(C_{\delta,MMR}^V) = f^M(\omega)C^M + \sum_{\lambda=1}^m f_{\lambda}(\omega)C^{H+}(\omega)(v_{\lambda}(\omega)) \underbrace{=}_{def} C_{MMR}^V(\omega) \\ E(S_{\delta,MMR}^R) = f^M(\omega)S^M + \sum_{\lambda=1}^m f_{\lambda}(\omega)S^{H-}(v_{\lambda}(\omega)) \underbrace{=}_{def} C_{MMR}^R(\omega) \end{cases} \quad (2.41)$$

où $m = \sum_{i=1}^n n(\omega_i)$, et où $f_{\lambda}(\omega)$ (respectivement $f^M(\omega)$) représente la fraction volumique locale du motif λ (respectivement de la matrice homogène) non plus au sein du VE $B_{\delta}(\omega)$ mais au sein du VER $B(\omega)$. De plus, comme la microstructure initiale $B(\omega)$ est suffisamment grande pour que l'on puisse l'assimiler à un VER, les bornes obtenues C_{MMR}^V et C_{MMR}^R sont déterministes (i.e. indépendantes de ω) car elles correspondent, par définition, aux bornes généralisées de type Voigt et Reuss MMR (associées à l'assemblage de motifs issu de la partition en cellules de Voronoï du VER) du comportement effectif du matériau.

Finalement, en projetant les équations (2.40) et (2.41) sur J_T et K_T , nous obtenons les bornes suivantes pour les modules plans de compressibilité et de cisaillement effectifs

$$\begin{aligned} \left(\frac{f^M}{K^M} + \sum_{\lambda=1}^m \frac{f_{\lambda}}{K^{HR}(v_{\lambda})} \right)^{-1} &= K_{MMR}^R \leq E(K_{\delta}^t)^{-1} \leq K^{eff} \\ &\leq E(K_{\delta}^d) \leq K_{MMR}^V = f^M K^M + \sum_{\lambda=1}^m f_{\lambda} K^{HR}(v_{\lambda}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{f^M}{\mu^M} + \sum_{\lambda=1}^m \frac{f_{\lambda}}{\mu^{HR-}(v_{\lambda})} \right)^{-1} &= G_{MMR}^R \leq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} E \left(\frac{1}{\lambda_{\delta}^t} \right) \right)^{-1} + \left(\frac{1}{2} E \left(\frac{1}{\mu_{\delta}^t} \right) \right)^{-1} \right) \leq G^{eff} \\ &\leq E \left(\frac{\lambda_{\delta}^d + \mu_{\delta}^d}{2} \right) \leq G_{MMR}^V = f^M \mu^M + \sum_{\lambda=1}^m f_{\lambda} \mu^{HR+}(v_{\lambda}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

où $K^{HR}(v_{\lambda})$, $\mu^{HR+}(v_{\lambda})$ et $\mu^{HR-}(v_{\lambda})$ sont donnés par les formules (2.32), (2.33) et (2.34) respectivement.

La microstructure initiale $B(\omega)$ étant assimilée à un VER, la dépendance en ω des bornes et des fractions volumiques f_{λ} , f^M , v_{λ} dans les inégalités (2.42) et (2.43) est omise. On notera cependant que dans les applications numériques, les bornes $C_{MMR}^{V,R}$ sont calculées par estimation des moyennes d'ensemble des bornes stochastiques $C_{\delta,MMR}^{V,R}$, i.e. $C_{MMR}^V = E(C_{\delta,MMR}^V)$, $C_{MMR}^R = (E(S_{\delta,MMR}^R))^{-1}$, pour le même nombre de réalisations que pour le calcul des bornes $VOR + / -$.

2.4 Résultats

Dans cette partie, nous calculons les bornes issues des approches par motifs dans le cas des composites de type matrice-inclusions à contraste infini, à savoir le composite renforcé par

des fibres rigides ($c = 10^4$) et le matériau poreux ($c = 10^{-4}$) et à contraste fini ($c = 5$). Dans tous les cas, nous comparons les bornes obtenues par les approches par motifs aux bornes de type Voronoï (VOR) ou de type Huet (SC) issus de calculs EF réalisés respectivement sur des VE non-carrés et carrés. À titre de référence, nous reportons aussi quelques modèles classiques issus de la littérature telles que les bornes de Hashin et Shtrikman classiques ou généralisées par MMR dont l'obtention a été présentée dans le paragraphe 2.2.

2.4.1 Contraste infini

Composite renforcé par des fibres rigides

Nous représentons sur la figure 2.2 les évolutions en fonction de δ des différentes bornes de type VOR, SC et MMR (obtenues dans le présent chapitre et le précédent) des modules effectifs K^{eff} et G^{eff} . À titre de comparaison, nous avons aussi reporté la borne inférieure classique de Hashin et Shtrikman $HS-$ (la borne supérieure étant égale à $+\infty$). Comme on s'y attendait, les évolutions des bornes de Voigt et Reuss MMR ne dépendent pas de δ . Les faibles variations observées sont liées au fait que le nombre m d'inclusions de la microstructure $B(\omega)$ n'est pas suffisamment élevé pour atteindre un comportement effectif constant, i.e la microstructure $B(\omega)$ n'est pas suffisamment grande. Nous avons également reporté l'IC relatif au calcul de chaque δ et pouvons remarquer qu'il diminue en fonction de la taille considérée comme on pouvait s'y attendre. On constate pour les deux modules plans que la borne généralisée de type Reuss n'améliore ni la borne inférieure de Hashin et Shtrikman, ni la borne $SC-$ (sauf pour de très faibles δ). En revanche, la borne généralisée de type Voigt améliore nettement la borne $SC+$ en dépit des nombreux calculs EF nécessaires à l'évaluation de cette dernière (non reportée en figure 2.2 car trop élevée). Si l'on souhaite obtenir une estimation peu coûteuse en temps de calcul du comportement effectif, la borne $HS-$ est la plus appropriée pour cette situation. En revanche, si l'on souhaite obtenir une borne supérieure du comportement effectif, la borne de Voigt MMR est une bonne candidate pour un coût numérique très faible.

Par ailleurs, l'encadrement fourni par les bornes généralisées de type Voigt et Reuss évalue à 11% (resp. 20%) près la valeur du module plan de compressibilité (resp. de cisaillement) effectif. Cependant le meilleur encadrement pour les deux modules effectifs est fourni par la borne de Hashin et Shtrikman $HS-$ et par la borne supérieure de type Voronoï $VOR+$. On peut également noter que la borne $HS-$ est exacte pour les modules effectifs de cette

microstructure isotrope et qu'il faut atteindre $\delta = 30$ pour que la borne $VOR-$ améliore $HS-$, alors que $SC-$ est toujours plus mauvaise.

On remarquera enfin que dans le cas d'un assemblage généralisé de cylindres composites de Hashin pour lequel les fibres ont un comportement rigide, les bornes généralisées supérieure et inférieure de type Hashin et Shtrikman C_{MMR}^{HS+} et C_{MMR}^{HS-} sont respectivement égales à la borne supérieure généralisée de type Voigt ($C_{MMR}^{HS+} = C_{MMR}^V$) et la borne inférieure classique de Hashin et Shtrikman ($C_{MMR}^{HS-} = C^{HS-}$); d'où les légendes adoptées dans la figure 2.3. On peut par exemple aisément le constater pour les bornes inférieures. En effet, pour calculer C_{MMR}^{HS-} , le cylindre de Hashin se trouve dans un milieu de référence dont la rigidité est égale à celle de la matrice. Comme la paroi extérieure du composite est constituée de la même matrice que le milieu de référence, cette configuration est équivalente à celle d'une inclusion homogène rigide baignant dans une matrice infinie : il s'agit de la configuration de calcul de C^{HS-} ; d'où l'équivalence $C_{MMR}^{HS-} = C^{HS-}$ dans ce cas de contraste. Par le même type de raisonnement, en remarquant que le milieu infini est rigide et donc que les CL en déplacement imposé se transmettent directement aux inclusions composites, on montre que $C_{MMR}^{HS+} = C_{MMR}^V$.

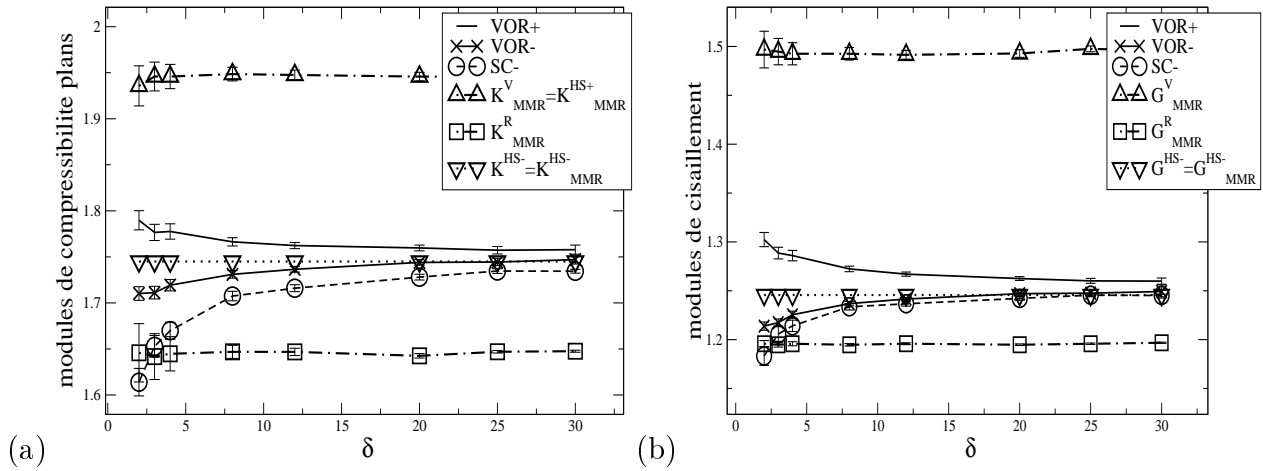


FIGURE 2.2 – Borne de K^{eff} (a) et de G^{eff} (b) pour un composite renforcé $c = 10^4$, $f^I = 15\%$

Matériau poreux

Les figures 2.3(a) et 2.3(b) représentent l'évolution en fonction de δ des bornes de type VOR, SC et MMR des modules de compressibilité plan K^{eff} et de cisaillement G^{eff} effectifs

pour le matériau poreux. A titre de comparaison sont également reportées la borne supérieure de Hashin et Shtrikman ($HS+$) (la borne inférieure étant nulle). Les résultats obtenus sur les bornes supérieures (K_{MMR}^V, G_{MMR}^V) présentent les mêmes tendances que celles observées dans le cas des composites renforcés de façon rigide pour les bornes inférieures.

Concernant la borne inférieure de type Reuss MMR, bien qu'elle améliore nettement la borne inférieure numérique $SC-$ pour les deux modules K et G et constitue une borne très simple et peu coûteuse à calculer, elle reste cependant très éloignée de la valeur du comportement effectif. En effet, sa valeur numérique correspond à environ 50% (resp. 40%) de la valeur du module de compressibilité plan (resp. de cisaillement) effectif. La borne inférieure de type Reuss MMR ne permet donc pas d'obtenir une approximation satisfaisante du comportement effectif dans le cas du matériau poreux contrairement à la borne supérieure de type Voigt MMR qui reste cependant moins précise que la borne $HS+$. On remarque de plus que la borne supérieure Voigt MMR améliore aussi la borne $SC+$ du module plan de compressibilité pour de faibles valeurs de δ .

Enfin, on constate que le meilleur encadrement pour les deux modules effectifs K^{eff}, G^{eff} est fourni par la borne inférieure $VOR-$ et par la borne supérieure $VOR+$ pour les grands δ et $HS+$ pour les petits δ , avec une transition vers $\delta = 8$ à 10. Dans le cas du matériau poreux, on remarque aisément que $C_{MMR}^{HS-} = C_{MMR}^R$ et $C_{MMR}^{HS+} = C^{HS+}$, justifiant ainsi les légendes adoptées.

Au vu de l'analyse des contrastes infinis, on s'aperçoit ainsi que les bornes de type Voigt et Reuss MMR issues des approches par MMR fournissent un encadrement intéressant et très simple à calculer du comportement effectif pour les composites renforcés par des particules rigides. En revanche, pour les matériaux poreux, elles ne permettent pas d'encadrer de façon précise le comportement effectif même si elles restent, au meilleur de la connaissance de l'auteur, les seules bornes inférieures quasi-analytiques disponibles et non nulles pour ce type de microstructures. Notons également que ces bornes s'appliquent également à des microstructures avec une distribution non isotrope des centres des disques, et ont donc une portée plus générale que les bornes HS limitées aux composites isotropes.

2.4.2 Contraste fini

Dans cette partie, nous comparons les bornes issues des différentes études menées dans ce travail pour un contraste fini $c = 5$ et une fraction volumique de 15%. La figure 2.4(a)

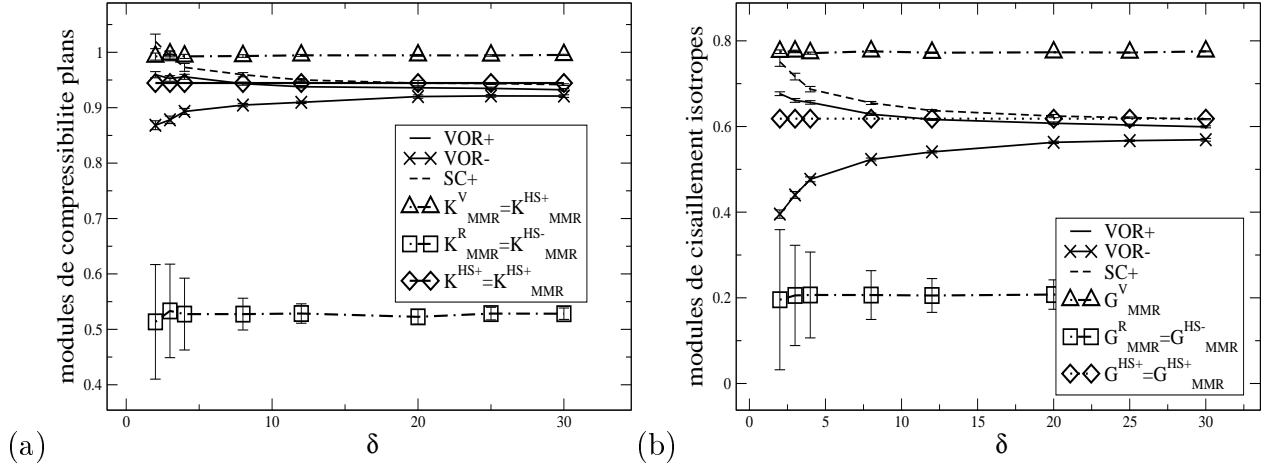


FIGURE 2.3 – Borne de K^{eff} (a) et de G^{eff} (b) pour un matériau poreux $c = 10^{-4}$, $f^I = 15\%$

montre que les bornes supérieure et inférieure de type Voigt et Reuss MMR encadrent K^{eff} avec des précisions relatives égales respectivement à 7% et 3%. Ces deux bornes fournissent ainsi un bon encadrement de K^{eff} du fait du faible contraste considéré. Cependant, elles n'améliorent ni les bornes numériques de type Voronoï (comme attendu) ni celles de type Huet, sauf pour les petits δ . En revanche la borne supérieure de type Voigt MMR améliore de façon significative la borne $HS+$. Ceci n'est pas le cas de la borne de type Reuss MMR qui reste nettement moins performante pour ce type de matériau que la borne inférieure de Hashin et Shtrikman $HS-$ qui est très proche du comportement effectif et fait mieux que $SC-$. Même si pour ce contraste les bornes de type Voigt et Reuss MMR sont moins resserrées que les bornes de type Voronoï et Huet, elles restent néanmoins intéressantes à évaluer en raison de leur faible coût numérique. Un encadrement optimal du comportement effectif par des bornes quasi-analytiques est fourni par la borne inférieure $HS-$ et supérieure Voigt MMR. On observe les mêmes tendances sur la figure 2.4, à ceci près que la borne G^{HS+} est plus resserrée que la borne K^{HS+} .

Le même type de tendance est observé pour un contraste $c = \frac{1}{5}$. Pour les contrastes intermédiaires $c \in [5, 10^4]$ (cas des matériaux renforcés) (resp. $c \in [10^{-4}, \frac{1}{5}]$, cas des matériaux assouplis), on passe de façon continue des conclusions obtenues pour le contraste 5 (resp. $\frac{1}{5}$) à celles relatives au contraste 10^4 (resp. 10^{-4}). Dans le cas des matériaux renforcés, on constate que l'encadrement du comportement effectif devient de moins en moins performant au fur et à mesure que c augmente tout en restant néanmoins satisfaisant comme nous l'avons vu pour le contraste infini $c = 10^4$. On observe la même conclusion pour le cas des matériaux assouplis ($c < 1$) au fur et à mesure que c diminue avec cependant une différence

pour la borne de type Reuss MMR qui devient beaucoup trop souple et donc inexploitable. L'inefficacité de cette borne inférieure MMR dans le cas de milieux poreux pourrait être attribuée à l'influence trop importante des quelques motifs associés à des inclusions proches de leurs voisines, dont la couronne de matrice est très fine du fait du processus retenu pour construire les motifs. Nous proposerons en fin de chapitre une piste pour corriger ce défaut.

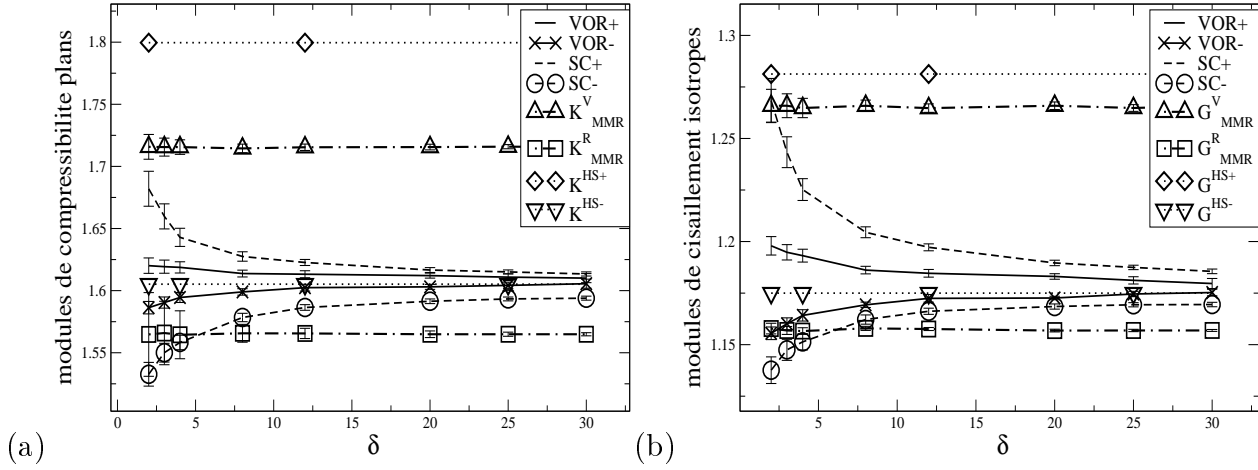


FIGURE 2.4 – Bornes de K^{eff} (a) et de G^{eff} (b) pour un matériau biphasé $c = 5$

2.4.3 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une approche permettant de calculer des bornes semi-analytiques du comportement effectif des composites de type matrice-inclusions, avec pour objectif d'obtenir des encadrements performants du comportement effectif pour un faible coût numérique. En effet, la méthode que nous avons exposée dans le chapitre précédent fournit des résultats performants en comparaison à ceux disponibles dans la littérature pour le même type de problème. Elle mobilise cependant un temps de calcul relativement important que nous souhaitons limiter en présentant de nouvelles bornes semi-analytiques basées sur l'approche par MMR. Grâce à cette dernière approche, des calculs par EF sont remplacés par des calculs semi-analytiques fondés sur les formules des bornes de Hashin et Rosen d'un assemblage de cylindres composites de Hashin. Dans cette approche, seuls les rayons des cylindres inscrits sont calculés numériquement à partir de la décomposition en cellules de Voronoï du VER $B_\delta(\omega)$. En plus de diminuer les temps de calcul, cette méthode présente un deuxième avantage qui tient à la possibilité d'appliquer les CL directement sur la matrice du motif et non sur les inclusions. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précé-

dent, cette possibilité constitue la raison principale de la performance des résultats obtenus par l'approche présentée au chapitre 1. Nous avons appliqué l'approche par MMR aux types de matériaux hétérogènes considérés au chapitre précédent : matériau renforcé par des inclusions rigides ($c = 10^4$), matériau poreux ($c = 10^{-4}$) et les biphasés ($c = 5$). Nous avons comparé les résultats issus des approches de type MMR, VOR, SC en les confrontant également, à titre de référence, à quelques modèles classiques issus de la littérature, telles que les bornes inférieure et supérieure de Hashin et Shtrikman.

Concernant les économies de temps procurées par l'approche de type MMR, les calculs pour toutes les tailles de VE considérées $\delta = 2, 3, 4, 8, 12, 20$ et pour un contraste donné sont effectués en une heure (l'essentiel du temps étant consacré à la génération des microstructures et la construction des cellules de Voronoï, les calculs mécaniques étant quasi instantanés) alors que ceux basés sur l'approche de type VOR peuvent prendre jusqu'à une semaine (pour $n = 1000$ et $\delta = 30$). L'objectif en terme d'économie en temps de calcul est donc pleinement satisfait. Cependant, comme nous avons pu le constater dans le paragraphe 2.4, la qualité des résultats dépend du type de composite considéré. Tout d'abord, nous avons remarqué que l'évolution des bornes de Voigt et Reuss MMR est indépendante de la taille δ du VE de calcul. Nous avons également constaté dans le cas du composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$), que l'amélioration principale apportée par l'approche par Motif concerne uniquement la borne de type Voigt MMR, qui améliore très nettement la borne $SC+$. La borne $HS-$ fournit cependant de bien meilleurs résultats que la borne de type Reuss MMR. En conséquence, pour le composite renforcé par des inclusions rigides, les bornes $HS-$ et Voigt MMR fournissent un bon encadrement des modules du comportement effectif. Dans le cas du matériau poreux ($c = 10^{-4}$) les résultats sont nettement moins satisfaisants. Bien que la borne de type Reuss MMR fournisse une borne inférieure non nulle du comportement effectif par opposition aux bornes $SC-$ et $HS-$, sa valeur demeure cependant très éloignée du comportement effectif. Quant à la borne de type Voigt MMR, bien qu'elle améliore la borne $SC+$ pour les faibles δ , elle reste cependant moins resserrée que la borne $HS-$. Ainsi, dans le cas du matériau poreux, les bornes de type Voigt et Reuss MMR ne permettent pas d'obtenir un encadrement satisfaisant du comportement effectif. Dans le cas du matériau biphasé ($c = 5$), les bornes de type Voigt et Reuss MMR fournissent de bons résultats et encadrent de façon satisfaisante les modules effectifs de ce matériau. La borne $HS-$ fournit cependant de bien meilleurs résultats pour les deux modules contrairement à la borne $HS+$ qui est moins resserrée que celle de Voigt MMR. En résumé, le gain en temps de calcul est très important quand on utilise l'approche par motifs mais son efficacité dépend du

type du matériau composite considéré. En particulier, cette approche est pertinente pour les composites renforcés ($c > 1$).

Une des faiblesses de l'approche présentée réside dans le fait que les MMR λ que nous avons pris en compte ne décrivent pas de façon entièrement satisfaisante la distribution des inclusions dans le VE en général et celle d'une inclusion au sein de sa cellule de Voronoï en particulier. En effet, à travers notre définition des MMR qui dans notre cas correspondent à des cylindres composites de Hashin, il n'est pas possible de savoir si l'inclusion d'une quelconque cellule de Voronoï se trouve centrée ou excentrée au sein de sa cellule. Afin de remédier à cette limitation, il serait intéressant au cours de travaux futurs, de concevoir un troisième modèle qui reposerait à la fois sur une discrétisation en cellules de Voronoï et sur une approche par MMR dont la définition des MMR pour décrire les VE serait plus pertinente et dont le comportement apparent des motifs serait obtenu numériquement par exemple à l'aide de calculs par EF. Pour ce faire, les nouveaux MMR seraient constitués par de nouveaux cylindres composites dont le centre ne serait plus celui de l'inclusion de la cellule de Voronoï considérée, mais le centre du plus grand cercle inscrit dans la cellule de Voronoï et contenant l'inclusion. De tels cylindres composites « excentrés » qui décrivent mieux la position centrée ou excentrée de chaque inclusion dans sa cellule de Voronoï permettront par conséquent d'obtenir une description plus adaptée de la distribution des inclusions dans les VE de calcul. Le comportement apparent de chaque cylindre sera ensuite obtenu à l'aide de calculs par EF de coût numérique très faible. Nous pourrions alors en déduire des bornes de Voigt et Reuss généralisées associées à cette description morphologique d'un VE $B_\delta(\omega)$ du comportement apparent. Cette méthode présentera évidemment un temps de calcul supérieur à celui de la méthode présentée dans ce chapitre en raison des calculs EF. Cependant, ce temps de calcul sera probablement moins important que celui associé à l'approche de type VOR présentée au chapitre 1 puisque les calculs ne sont pas appliqués à tout le VE à la fois mais indépendamment sur chaque cylindre composite constituant le VE, dont la géométrie est décrite par des paramètres en nombre très limité.

Chapitre 3

Étude statistique des comportements apparents

3.1 Introduction

Jusqu'à ce stade de l'étude, nous nous sommes intéressés uniquement à l'étude du moment d'ordre un des modules apparents afin de construire des bornes du comportement effectif du matériau hétérogène étudié. On se propose dans cette partie d'enrichir l'étude statistique en s'intéressant à une évaluation plus complète de la statistique des comportements apparents et de l'évolution de celle-ci en fonction de la taille δ du VE de calcul.

Une étude exhaustive de la statistique du comportement apparent comporte plusieurs intérêts. D'une part, elle nous permet d'introduire des critères de tailles de VER qui prennent en compte non seulement les moyennes d'ensemble des comportements apparents mais aussi leurs fluctuations, permettant ainsi d'obtenir des critères plus riches et plus complets. Une étude statistique du comportement apparent est donc nécessaire pour intégrer ces fluctuations de façon pertinente dans la conception d'un critère de VER. La présentation de nouveaux critères de VER sera traitée au chapitre 4. D'autre part, il existe un certain nombre de situations pour lesquelles on ne dispose pas forcément d'un comportement effectif, par exemple dans les cas où l'hypothèse de séparation d'échelles ou d'ergodicité et de stationnarité ne sont pas vérifiées. Pour ces situations, la seule information dont on peut disposer à l'échelle d'un VE de taille δ pour modéliser le comportement du composite est la statistique des comportements apparents, d'où la nécessité d'une analyse statistique.

L'étude de la variabilité des modules apparents concernera les 6 modules des tenseurs apparents de rigidité et des souplesses. Pour chaque quantité considérée, nous étudions l'évolution du coefficient de variation en fonction de la taille du VE δ . Nous nous intéressons également à la statistique complète des modules apparents de compressibilité plan et de cisaillement en estimant leurs densités de probabilité. Nous chercherons en outre à déterminer l'origine des fluctuations observées. Enfin nous étudierons l'évolution en fonction de la taille δ du VE d'une quantité Δ_{iso} (voir l'équation (3.7)) qui peut s'interpréter comme une mesure statistique de l'écart à l'isotropie du comportement apparent.

3.2 Quantités considérées

Nous nous intéressons dans cette partie à l'étude de la variabilité des variables aléatoires $Z_\delta(\omega)$ définies par :

$$\begin{aligned} \text{--pour des CLDA :} \quad Z_\delta^d(\omega) &= \underbrace{K_\delta^d(\omega), G_\delta^d}_{\text{partie isotrope}}, \underbrace{\frac{\mu_\delta^d(\omega) - \lambda_\delta^d(\omega)}{2}, \alpha_\delta^d(\omega), \beta_\delta^d(\omega), \gamma_\delta^d(\omega)}_{\text{écart à l'isotropie}}, \\ \text{--pour des CLCH :} \quad Z_\delta^t(\omega) &= \underbrace{\frac{1}{K_\delta^t(\omega)}, \frac{1}{G_\delta^t}}_{\text{partie isotrope}}, \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_\delta^t(\omega)} - \frac{1}{\lambda_\delta^t(\omega)} \right), \frac{1}{\alpha_\delta^t(\omega)}, \frac{1}{\beta_\delta^t(\omega)}, \frac{1}{\gamma_\delta^t(\omega)}}_{\text{écart à l'isotropie}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dans la relation (3.1), les modules $K_\delta^d(\omega)$, $K_\delta^t(\omega)$, $G_\delta^d(\omega)$, $G_\delta^t(\omega)$ définis par

$$\begin{aligned} K_\delta^d(\omega) &= \frac{C_\delta^d(\omega) :: J_T}{2}, \quad G_\delta^d(\omega) = \frac{C_\delta^d(\omega) :: K_T}{4}, \\ \frac{1}{K_\delta^t(\omega)} &= 2S_\delta^t(\omega) :: J_T, \quad \frac{1}{G_\delta^t(\omega)} = S_\delta^t(\omega) :: K_T, \end{aligned} \quad (3.2)$$

représentent dans le cas d'un problème mécanique 2D en déformations planes les projections isotropes des modules apparents des tenseurs de rigidité $C_\delta^d(\omega)$ et des souplesses $S_\delta^t(\omega)$. En utilisant les notations de la relation (1.36), les modules $G_\delta^d(\omega)$ et $G_\delta^t(\omega)$ vérifient les relations suivantes

$$G_\delta^d(\omega) = \frac{\lambda_\delta^d(\omega) + \mu_\delta^d(\omega)}{2}, \quad G_\delta^t(\omega) = 2 \left(\frac{1}{\mu_\delta^t(\omega)} + \frac{1}{\lambda_\delta^t(\omega)} \right)^{-1}. \quad (3.3)$$

Si l'on se réfère à la relation (3.1), les variables aléatoires $Z_\delta(\omega)$ peuvent ainsi être classées en deux groupes. Le premier groupe contient les variables aléatoires caractérisant la partie isotrope des modules de rigidité $C_\delta^d(\omega)$ et de souplesse $S_\delta^t(\omega)$ apparents, c'est-à-dire $K_\delta^d(\omega)$, $G_\delta^d(\omega)$, $K_\delta^t(\omega)$, $G_\delta^t(\omega)$, tandis que le deuxième groupe est représenté par les composantes de rigidité ou de souplesse décrivant l'écart à l'isotropie c'est-à-dire $(\mu_\delta^d(\omega) - \lambda_\delta^d(\omega)) / 2$,

$\alpha_\delta^d(\omega)$, $\beta_\delta^d(\omega)$, $\gamma_\delta^d(\omega)$, $(1/\mu_\delta^t(\omega) - 1/\lambda_\delta^t(\omega))/2$, $1/\alpha_\delta^t(\omega)$, $1/\beta_\delta^t(\omega)$, $1/\gamma_\delta^t(\omega)$, ce dernier étant défini comme l'écart des tenseurs C_δ^d et S_δ^t à leur projection isotrope.

Nous avons vu au chapitre 1 que le calcul des bornes du comportement effectif ne fait intervenir que les modules $Z_\delta(\omega)$ portant sur la partie isotrope du comportement apparent. En effet (voir paragraphe 1.5.5), du fait de l'invariance par rotation autour de l'axe des fibres, le comportement effectif C^{eff} et les bornes de type Voronoï $C_\delta^{\text{VOR+/-}}$ sont isotropes transverses. Par conséquent, dans le cas d'un problème en déformations planes, le comportement effectif s'écrit selon l'équation (1.39). En appliquant l'équation (1.39) aux inégalités (1.21), nous obtenons

$$K_\delta^{\text{VOR-}} \leq K^{\text{eff}} \leq K_\delta^{\text{VOR+}}, \quad G_\delta^{\text{VOR-}} \leq G^{\text{eff}} \leq G_\delta^{\text{VOR+}}, \quad (3.4)$$

où les bornes $K_\delta^{\text{VOR+}}$, $G_\delta^{\text{VOR+}}$, peuvent être évaluées par les relations suivantes

$$\begin{aligned} K_\delta^{\text{VOR+}} &= E(K_\delta^d), \quad K_\delta^{\text{VOR-}} = \left(E\left(\frac{1}{K_\delta^t}\right) \right)^{-1}, \\ G_\delta^{\text{VOR+}} &= E(\lambda_\delta^d) = E(\mu_\delta^d) = E(G_\delta^d), \\ G_\delta^{\text{VOR-}} &= \left(E\left(\frac{1}{\lambda_\delta^t}\right) \right)^{-1} = \left(E\left(\frac{1}{\mu_\delta^t}\right) \right)^{-1} = \left(E\left(\frac{1}{G_\delta^t}\right) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les formules (3.5) sont obtenues en utilisant la propriété d'isotropie transverse des bornes de type Voronoï ainsi que leurs définitions (1.28).

L'étude statistique du comportement apparent qui est menée dans ce chapitre a pour objectif d'analyser les fluctuations des variables aléatoires $Z_\delta(\omega)$ introduites précédemment. Ces fluctuations dépendent de plusieurs paramètres tels que la propriété mécanique considérée - à savoir le module $Z_\delta(\omega)$ - les CL, les fluctuations de la microstructure, la taille δ du VE et les propriétés du matériau hétérogène, comme le contraste entre les phases et la fraction volumique d'inclusions. Dans ce travail, l'analyse des fluctuations de chaque variable aléatoire $Z_\delta(\omega)$ est réalisée d'une part à travers l'étude de son coefficient de variation $CoV(Z_\delta) = \sigma(Z_\delta)/E(Z_\delta)$ qui fournit une information partielle sur la statistique de $Z_\delta(\omega)$, et d'autre part à travers celle de la densité de probabilité ($dp(Z_\delta)$) qui contient toute la statistique de $Z_\delta(\omega)$. Soulignons que cette densité est calculée en attribuant le poids $V_\delta(\omega)/E(V_\delta)$ à chaque réalisation ω de $Z_\delta(\omega)$. Par ailleurs, dans le but de quantifier l'influence des CL sur les fluctuations des modules, nous calculons aussi les fluctuations $\Delta Z_\delta^{\text{VOR}}/Z_\delta^{\text{VOR}}$ que nous définissons par

$$\frac{\Delta Z_\delta^{\text{VOR}}}{Z_\delta^{\text{VOR}}} = \frac{Z_\delta^{\text{VOR+}} - Z_\delta^{\text{VOR-}}}{Z_\delta^{\text{VOR+}} + Z_\delta^{\text{VOR-}}} = \frac{E(Z_\delta^d) - E(1/Z_\delta^t)^{-1}}{E(Z_\delta^d) + E(1/Z_\delta^t)^{-1}}, \quad (3.6)$$

pour $Z_\delta(\omega) = K_\delta^{d,t}(\omega)$, $G_\delta^{d,t}(\omega)$. Au vu de la définition (3.6), on constate que les fluctuations liées à la variabilité de la microstructure, que l'on appellera « fluctuations individuelles » dans toute la suite, ne sont pas prises en compte au sein des fluctuations $\Delta Z_\delta^{VOR}/Z_\delta^{VOR}$. En effet, en raison des moyennes d'ensemble qui sont effectuées sur les variables aléatoires, les fluctuations $\Delta Z_\delta^{VOR}/Z_\delta^{VOR}$ ne prennent en compte que la contribution des effets des CL dans la fluctuation des modules, contrairement aux fluctuations décrites par le *CoV* qui dépendent des fluctuations individuelles de la microstructure, pour un choix de CL donné. Pour cette raison les fluctuations $\Delta Z_\delta^{VOR}/Z_\delta^{VOR}$ seront dénommées « fluctuations liées aux CL » dans tout ce qui suit. Une représentation graphique des fluctuations $\Delta K_\delta^{VOR}/K_\delta^{VOR}$ et $CoV(K_\delta^d)$ du module de compressibilité plan apparent est donnée sur la figure 3.1.

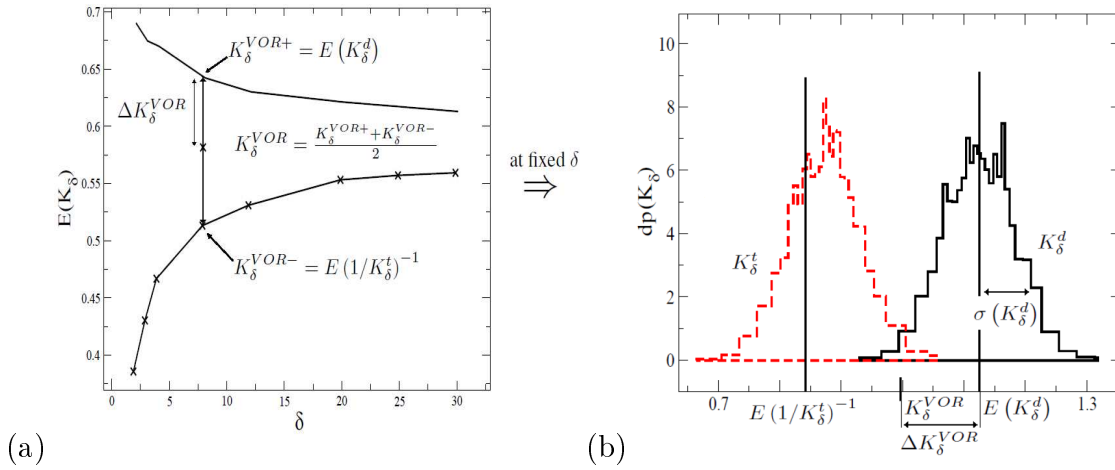


FIGURE 3.1 – Interprétation graphique des fluctuations $\Delta K_\delta^{VOR}/K_\delta^{VOR}$ (a) et $CoV(K_\delta^d) = \sigma(K_\delta^d)/E(K_\delta^d)$ (b) du module apparent de compressibilité plan

Enfin, nous définissons et calculons les quantités suivantes

$$\begin{aligned} \Delta_{iso}^d &= \sqrt{E \left(\left(\frac{\mu_\delta^d - \lambda_\delta^d}{2} \right)^2 + (\alpha_\delta^d)^2 + (\beta_\delta^d)^2 + (\gamma_\delta^d)^2 \right)} \\ \Delta_{iso}^t &= \sqrt{E \left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_\delta^t} - \frac{1}{\lambda_\delta^t} \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_\delta^t} \right)^2 + \left(\frac{1}{\beta_\delta^t} \right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma_\delta^t} \right)^2 \right)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

qui peuvent s'interpréter comme des mesures statistiques de l'écart à l'isotropie du comportement apparent. Ces quantités peuvent fournir des informations intéressantes sur la taille du VER. En effet, comme nous l'avons mentionné en 1.5.1, le comportement effectif du matériau hétérogène considéré est isotrope transverse. Par conséquent, la convergence de ces mesures vers 0 quand δ augmente nous renseigne sur l'isotropie du comportement apparent

des VE de taille δ , qui est une condition nécessaire de convergence vers le comportement effectif.

3.3 Résultats : Coefficient de variation

Les applications numériques ont été réalisées pour deux groupes de matériaux. Le premier comprend les matériaux à contraste infini, c'est-à-dire les composites renforcés par des fibres rigides ($c = 10^4$) et les matériaux poreux ($c = 10^{-4}$). Le deuxième groupe est constitué par les matériaux biphasés à faible contraste ($c = 5$ et $c = 1/5$). Les calculs ont été réalisés pour 2 fractions volumiques ($f^I = 15\%, 30\%$). Pour toutes les applications numériques, le nombre de réalisations n est fixé à 2000 pour $2 \leq \delta < 20$ et à 1000 pour $20 \leq \delta \leq 30$.

3.3.1 Contrastes infinis

Nous représentons sur les figures 3.2 et 3.3 l'évolution en fonction de δ des CoV des modules de compressibilité plan (a) et de cisaillement (b) dans les cas respectifs d'un composite renforcé et d'un matériau poreux pour les deux fractions volumiques ($f^I = 15\%, 30\%$). Tout d'abord, comme on pouvait s'y attendre, les fluctuations des modules apparents de compressibilité plan et de cisaillement pour les deux matériaux considérés décroissent en fonction de δ , jusqu'à tendre vers une variabilité négligeable, point où le comportement effectif est atteint pour une précision donnée. Nous remarquons par ailleurs que les fluctuations sont plus importantes dans le cas du matériau poreux et qu'elles convergent plus lentement vers 0 que dans le cas du composite renforcé par des fibres rigides, suggérant ainsi une taille de VER plus grande dans le cas d'un matériau poreux. De plus, les fluctuations des modules apparents de compressibilité plan et de cisaillement sont d'un même ordre de grandeur dans le cas du composite renforcé alors qu'elles diffèrent dans le cas du matériau poreux. Nous pouvons donc nous attendre à une taille de VER identique pour les deux modules de compressibilité plan et de cisaillement dans le cas du matériau renforcé alors que la taille de VER associée au module de cisaillement serait supérieure à celle associée au module plan de compressibilité dans le cas du matériau poreux. Par ailleurs, les figures 3.2 et 3.3 montrent que l'écart entre les CoV calculés pour des CLDA et pour des CLCH converge plus rapidement vers 0 que les CoV eux même, montrant ainsi que l'influence des CL sur les fluctuations des modules est d'un ordre de grandeur plus faible que l'influence des fluctuations individuelles de la

microstructure. Cette remarque est valable pour toutes les courbes présentées sur les figures 3.2 et 3.3, à l'exception des évolutions des CoV en fonction de δ du module de cisaillement dans le cas du matériau poreux (figure 3.3b).

Cette tendance est corroborée par l'évolution en fonction de δ des fluctuations liées aux CL $\Delta Z_\delta^{VOR}/Z_\delta^{VOR}$ des modules de compressibilité plan et de cisaillement, comme le montrent les figures 3.2 et 3.3 qui permettent d'analyser l'influence des CL sur les fluctuations. En effet, à l'exception à nouveau de la figure 3.3b, les fluctuations liées aux CL sont plus faibles que les CoV et deviennent négligeables à partir d'une valeur de δ qui correspond approximativement à la valeur pour laquelle les deux CoV issus respectivement de CLDA et de CLCH (pour une même variable Z_δ) se confondent. Cette observation confirme le fait que les fluctuations individuelles de la microstructure ont un plus grand effet sur les fluctuations des modules apparents que celui induit par les CL, à l'exception cependant des fluctuations du module de cisaillement dans le cas du matériau poreux. Enfin, on remarque que dans le cas du composite renforcé que les fluctuations des modules sont plus importantes quand ces derniers sont issus d'un calcul basé sur des CLDA, alors que la tendance est inversée pour le matériau poreux (fluctuations plus importantes lorsque les modules sont calculés à partir de CLCH).

En étudiant l'influence de l'augmentation de la fraction volumique des inclusions sur la variabilité du comportement apparent du composite renforcé par des fibres rigides et du matériau poreux, nous avons remarqué l'existence de deux effets différents. Le premier, induit par l'augmentation de la fraction volumique des inclusions f^I de 15 à 30%, consiste en une forte augmentation des fluctuations liées aux CL dans le cas des deux modules et pour les deux composites étudiés. Ceci s'explique par le fait que l'augmentation de la fraction volumique des inclusions entraîne en moyenne une augmentation du nombre d'inclusions proches du bord du VE dont la réponse devient en conséquence plus sensible à l'influence des CL. Afin d'expliquer plus en détail cette observation, considérons le cas des très faibles fractions volumiques. Dans cette situation, les inclusions deviennent très distantes à la fois les unes des autres et du bord du VE. Elles se comportent par conséquent, pour la plupart, comme une inclusion isolée du problème de l'hétérogénéité d'Eshelby [17]. Dans ce cas, on tend vers l'estimation du comportement effectif d'un milieu dilué et on s'attend à ce que les bornes associées à des CLDA et à des CLCH coïncident. L'influence des CL sur le comportement apparent a donc quasiment disparu pour les milieux dilués. Si l'on augmente progressivement la fraction volumique, l'interaction entre inclusions et entre inclusions et CL devient de plus en plus importante, impliquant une augmentation de l'écart entre les bornes de type VOR

associées à des CLDA et à des CLCH, comme on peut l'observer quand on passe de $f^I = 15\%$ à 30% (figures 3.2 et 3.3). Le second effet observé lorsque l'on augmente la fraction volumique d'inclusions consiste en une légère diminution du CoV pour les grandes valeurs de δ et une légère augmentation du CoV pour les petites valeurs de δ dans le cas du composite renforcé par des fibres rigides. On observe les mêmes tendances pour le matériau poreux en ce qui concerne les modules apparents issus de CLDA. En revanche, on remarque dans le cas du matériau poreux une légère diminution du CoV des modules apparents soumis à des CLCH pour toutes les valeurs de δ . Ce comportement complexe de la variabilité des propriétés apparentes en fonction de la fraction volumique des inclusions est moins évident à expliquer car il est vraisemblablement issue de la combinaison de 2 effets conduisant à des tendances opposées. Le premier effet est lié à la variabilité de la microstructure du VE de calcul qui est plus importante dans le cas de petites et moyennes valeurs de δ que dans le cas de grandes valeurs de δ proche de la limite de compaction de l'algorithme RSA, situation pour laquelle les positions relatives des particules sont assez contraintes en raison de la condition de non recouvrement. Le deuxième effet est lié aux interactions des inclusions d'une part entre elles et d'autre part avec les bords du VE. Ces interactions sont limitées dans le cas de petites valeurs de fractions volumiques pour lesquelles la plupart des inclusions se comportent comme l'inclusion isolée du problème d'Eshelby, comme mentionné précédemment. Dans le cas d'une augmentation de la fraction volumique des inclusions, la distance moyenne entre celles-ci diminue ainsi que la distance séparant les particules du bord de la frontière du VE, augmentant ainsi les effets d'interaction. Cette augmentation des effets d'interactions conjuguées à une variabilité non négligeable de la microstructure contribue vraisemblablement à une augmentation des fluctuations des propriétés apparentes. Cependant si l'on continue à augmenter la fraction volumique jusqu'à approcher la limite de compaction, la variabilité générée par les effets d'interaction restera limitée car la variabilité de la microstructure sera faible du fait que l'on est proche de la limite de compaction. La combinaison de ces 2 effets entraîne une évolution complexe des CoV des modules apparents en fonction de la fraction volumique qui pourrait présenter des maxima locaux pour certaines fractions volumiques critiques. Avant un maximum local, la variabilité de la microstructure (qui décroît avec l'augmentation de f^I) et les effets d'interactions (qui croissent avec la fraction volumique) vont tendre à faire augmenter la variabilité du comportement apparent. Au delà du maximum local, la diminution de la variabilité de la microstructure va l'emporter sur l'augmentation des effets d'interactions conduisant à une diminution de la variabilité du comportement apparent mesurée par le CoV . Effectuer une analyse quantitative de l'évolution du CoV en fonction de la fraction

volumique nécessiterait de recourir à de nombreuses simulations numériques supplémentaires effectuées pour différentes fractions volumiques f^I . Une telle étude n'a pas été traitée dans cette thèse et pourrait faire l'objet de travaux futurs.

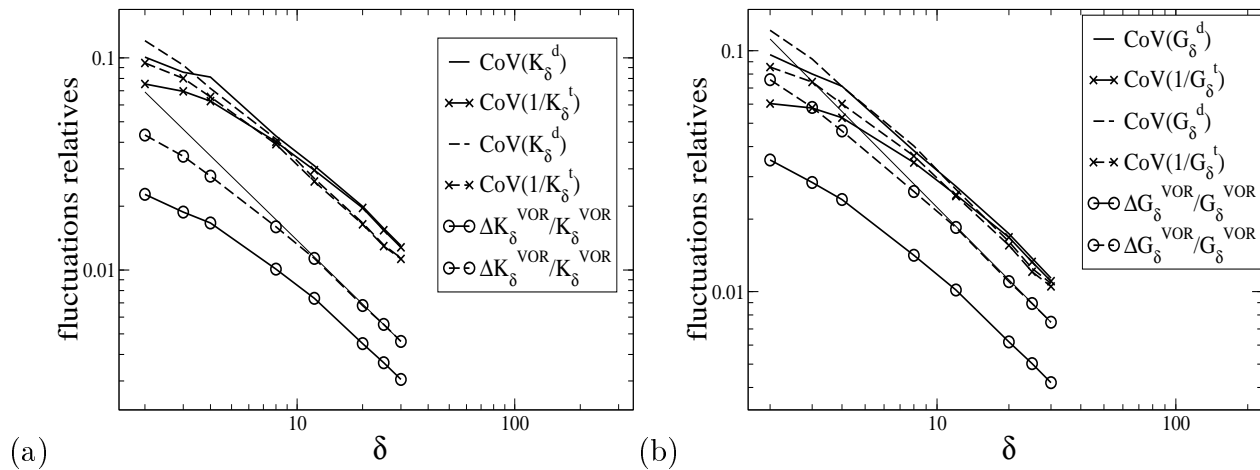


FIGURE 3.2 – Composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$) : évolution en fonction de δ des

CoV

et des fluctuations liées aux CL des modules apparents de compressibilité plan (a) et de cisaillement (b) pour des CLDA et des CLCH. Les lignes continues sont relatives à $f^I = 15\%$ et les discontinues à $f^I = 30\%$ (une droite de pente (-1) est rajoutée en guise de référence)

3.3.2 Matériaux biphasés

Nous représentons sur les figures 3.4 et 3.5 l'évolution en fonction de δ des fluctuations des modules de compressibilité plan (a) et de cisaillement (b) dans les cas de matériaux biphasés présentant des contrastes respectifs de $c = 5$ et $c = 1/5$ et pour des fractions volumiques égales à 15% et 30%. Nous observons exactement les mêmes tendances pour les contrastes $c = 5$ et $c = 1/5$ que celles observées respectivement pour le composite renforcé rigidement ($c = 10^4$) et le matériau poreux ($c = 10^{-4}$) à 2 nuances près. D'une part les fluctuations des modules dans le cas des faibles contrastes sont plus faibles que celles des composites à contraste infini. D'autre part l'influence des CL (représentée par les fluctuations $\Delta Z_\delta^{\text{VOR}}/Z_\delta^{\text{VOR}}$) sur les fluctuations totales (représentées par les

CoV

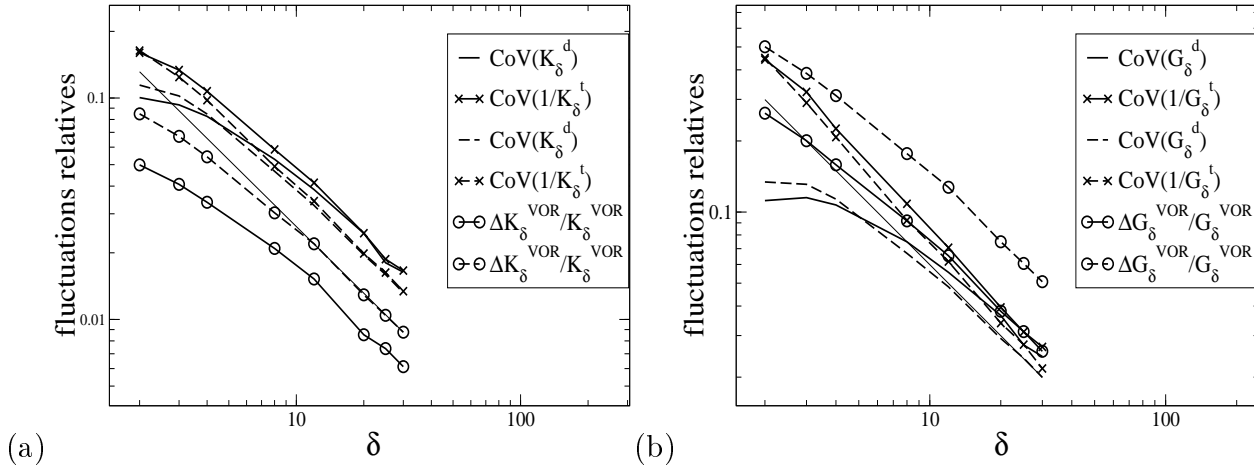


FIGURE 3.3 – Matériau poreux ($c = 10^{-4}$) : évolution en fonction de δ des

$$\text{CoV}$$

et des fluctuations liées aux CL des modules apparents de compressibilité plan (a) et de cisaillement (b) pour des CLDA et des CLCH. Les lignes continues sont relatives à $f^I = 15\%$ et les discontinues à $f^I = 30\%$

) est encore plus réduite dans le cas des composites à faible contraste que pour celui des composites à contraste infini, en particulier dans le cas du matériau poreux, $\Delta Z_\delta^{\text{VOR}}/Z_\delta^{\text{VOR}}$ devient plus petit que les

$$\text{CoV}$$

.

Enfin, nous remarquons pour tous les contrastes testés que pour les grandes valeurs de δ , les

$$\text{CoV}$$

évoluent en fonction de δ selon une loi de la forme $\log(\text{CoV}(Z_\delta^{d,t})) = a \log \delta + \log(b^{d,t}(Z))$, où $a \simeq -1$ et $b^{d,t}(Z)$ est une constante qui dépend à la fois des CL appliquées et de la propriété Z considérée (ainsi que, bien entendu, de c et de f^I). Cette loi d'évolution du CoV peut être réécrite sous la forme $\text{CoV}(Z_\delta^{d,t})\delta = b^{d,t}(Z)$. Pour les valeurs plus faibles de δ , en particulier dans le cas des matériaux à fort contraste entre les phases, nous remarquons que la pente des courbes est toujours supérieure ou égale à -1 . La valeur de δ , pour laquelle la pente valant -1 est atteinte, semble coïncider avec la taille δ pour laquelle les CoV issus de CLDA et de CLCH fusionnent. On remarque qu'une évolution du CoV proportionnelle en $1/\delta$ serait aussi

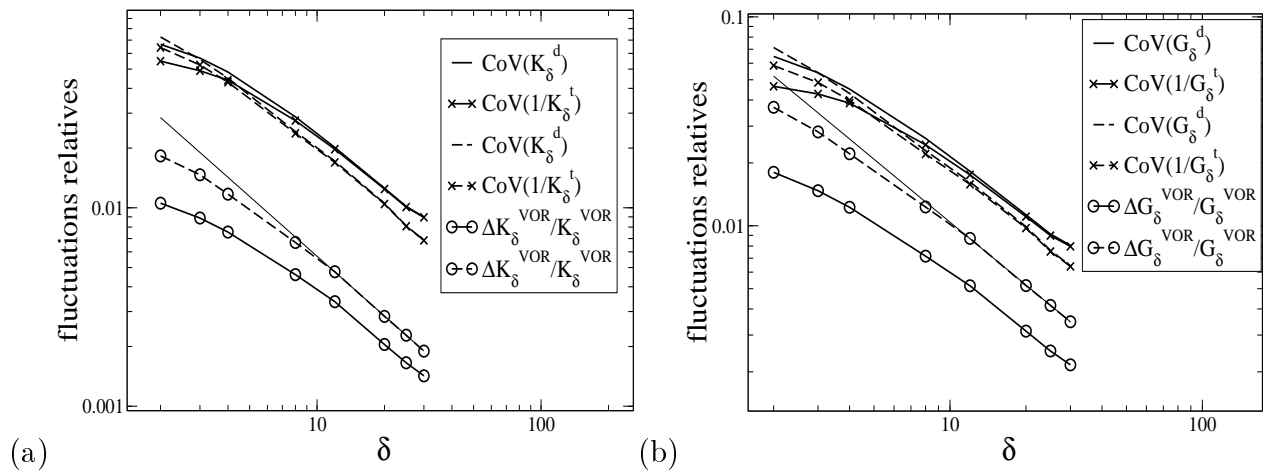


FIGURE 3.4 – Matériau biphasé ($c = 5$) : évolution en fonction de δ des

CoV

et des fluctuations liées aux CL des modules apparents de compressibilité plan (a) et de cisaillement (b) pour des CLDA et des CLCH. Les lignes continues sont relatives à $f^I = 15\%$ et les discontinues à $f^I = 30\%$

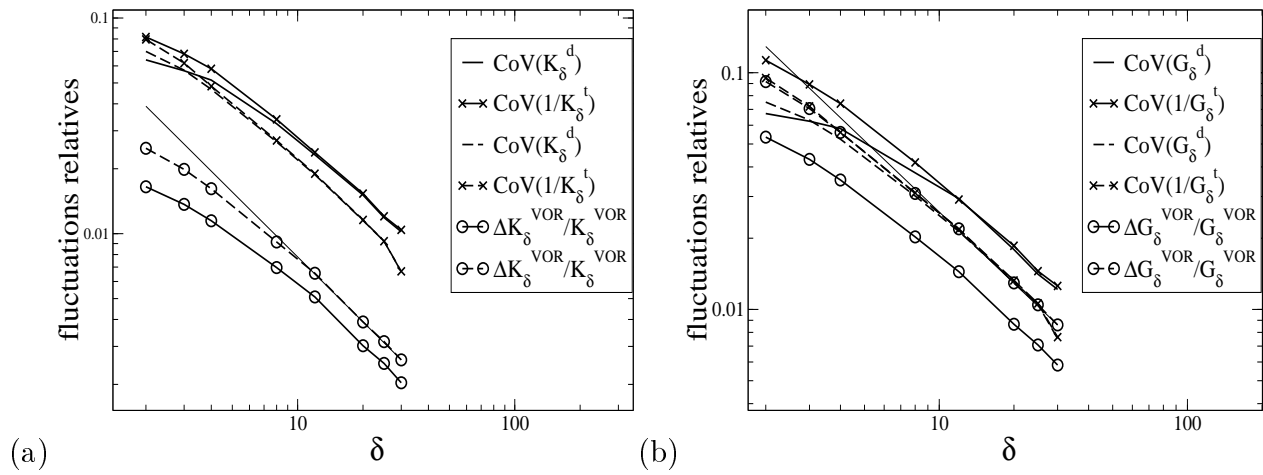


FIGURE 3.5 – Matériau biphasé ($c = 1/5$) : évolution en fonction de δ des

CoV

et des fluctuations liées aux CL des modules apparents de compressibilité plan (a) et de cisaillement (b) pour des CLDA et des CLCH. Les lignes continues sont relatives à $f^I = 15\%$ et les discontinues à $f^I = 30\%$

observée si le calcul des propriétés apparentes d'un VE de taille δ était équivalent à 4 calculs indépendants réalisés sur des VE de tailles $\delta/2$. Par ailleurs, une justification théorique de ce comportement asymptotique - c'est-à-dire l'évolution du CoV proportionnelle à $1/\delta$ pour δ suffisamment élevé - fondée sur la notion de portée intégrale est fournie par Willot et Jeulin [62]. L'apparition de ce comportement asymptotique semble coïncider avec la disparition de l'influence des CL sur le comportement apparent. L'ensemble des figures montrent que la taille δ pour laquelle cette propriété asymptotique est atteinte dépend du contraste et de la fraction volumique f^I . Cette valeur vaut par exemple $\delta = 20$ dans le cas du module de compressibilité plan pour un composite renforcé par des fibres rigides comme le montre la figure 3.2a.

3.4 Résultats : Densité de probabilité

Afin d'obtenir une description complète de la statistique du comportement apparent, nous avons calculé les densités de probabilité des modules apparents pour les différentes tailles δ considérées jusqu'à présent et pour 2 fractions volumiques d'inclusions ($f^I = 15\%$, $f^I = 30\%$). A nouveau, les calculs ont été réalisés d'une part pour les matériaux à contraste infini à savoir le composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$, figures 3.6 et 3.7) et le matériau poreux ($c = 10^{-4}$, figures 3.8 et 3.9), et d'autre part pour les matériaux biphasés à faible contraste ($c = 5$, figures 3.10 et 3.11 et $c = 1/5$, figures 3.12 et 3.13). Pour chacun des contrastes considérés, nous avons tracé les densités de probabilité des modules apparents de compressibilité plans $K_\delta^{d/t}(\omega)$ et de cisaillement isotropes $G_\delta^{d/t}(\omega)$ uniquement pour deux valeurs de la taille du VE ($\delta = 2$, $\delta = 12$), ces deux valeurs étant choisies de façon à d'obtenir une description satisfaisante de l'évolution des densités de probabilité en fonction de δ . Nous avons également reporté sur les mêmes figures les distributions Gaussiennes ayant pour moyenne $E(K_\delta^d)$ (resp. $E(G_\delta^d)$) et écart-type $\sigma(K_\delta^d)$ (resp. $\sigma(G_\delta^d)$) pour les deux modules considérés. Dans le but de pouvoir comparer les distributions issues de différentes configurations, les modules apparents ont été rapportés aux modules effectifs respectifs. Ces modules effectifs sont évalués par

$$K^{eff} = \frac{E(K_{\delta=30}^d) + E(K_{\delta=30}^t)}{2}, \quad G^{eff} = \frac{E(G_{\delta=30}^d) + E(G_{\delta=30}^t)}{2}. \quad (3.8)$$

3.4.1 Contrastes infinis

Comme on peut le constater sur la figure 3.6a, pour le composite renforcé par des inclusions rigides, les densités de probabilité de $K_\delta^{d,t}(\omega)$ à $\delta = 2$ sont assez proches l'une de l'autre, même si la densité de probabilité de $K_\delta^d(\omega)$ est légèrement décalée vers la droite en accord avec la relation d'encadrement 1.21. Cette proximité apparente est due au fait que la variabilité individuelle domine l'effet des CL.

Les densités de probabilité de $K_\delta^{d,t}(\omega)$ présentent toutes les deux une asymétrie positive avec une longue queue de distribution vers la droite et quasiment aucune queue de distribution vers la gauche. On remarque que les VE $B_\delta(\omega)$ à $\delta = 2$ et $f^I = 15\%$ sont composés principalement d'une seule cellule de Voronoï, même s'il existe une quantité non négligeable de VE résultant de la concaténation de deux cellules de Voronoï. Pour ce dernier type de VE, on remarque qu'en moyenne il présente un volume supérieure à la moyenne des volumes sur toutes les réalisations, par conséquent sa pondération $V_\delta(\omega)/E(V_\delta)$ l'est aussi. Les modules apparents de ce type de VE sont aussi en moyenne plus rigides que leur valeur moyenne sur tout le composite $E(K_\delta^{d,t})$ car la fraction volumique d'inclusions locale de ce type de VE est supérieure à la fraction volumique d'inclusions globale f^I . Ces constatations permettent d'expliquer l'allure des densités de probabilité de $K_\delta^{d,t}(\omega)$ à $\delta = 2$ et $f^I = 15\%$, où les longues queues de distribution vers la droite sont générées par ces VE à 2 cellules de Voronoï alors que la partie centrale des distributions provient des VE à une seule cellule de Voronoï. L'allure des densités de probabilité des modules apparents de compressibilité plane évolue lentement en fonction de δ et tend vers une densité gaussienne dès que $\delta = 12$, où l'on constate que la densité de $K_\delta^d(\omega)$ est de densité gaussienne de moyenne $E(K_\delta^d)$ et d'écart-type $\sigma(K_\delta^d)$. A partir de $\delta = 12$, les densités de probabilité conservent leur allure de gaussienne quand δ augmente, et comme on pouvait s'y attendre leurs moyennes convergent vers le module de compressibilité plan effectif alors que leur écart-type tend vers zéro.

Pour une fraction volumique d'inclusions plus importante $f^I = 30\%$, on remarque dans le cas du composite renforcé (figures 3.6c et 3.6d) une évolution similaire des densités de probabilité vers une densité gaussienne des modules de compressibilité plane apparents en fonction de δ à celles observées pour $f^I = 15\%$. Cependant pour $\delta = 2$, les densités de probabilité de $K_\delta^{d,t}(\omega)$ sont déjà assez proches d'une distribution gaussienne avec cependant un léger décalage vers la droite qui persiste. Cette nouvelle allure des densités de probabilité pour $\delta = 2$ est due au fait que pour cette nouvelle fraction volumique $f^I = 30\%$, la plupart des VE sont composés de deux cellules de Voronoï, alors qu'une minorité non négligeable est

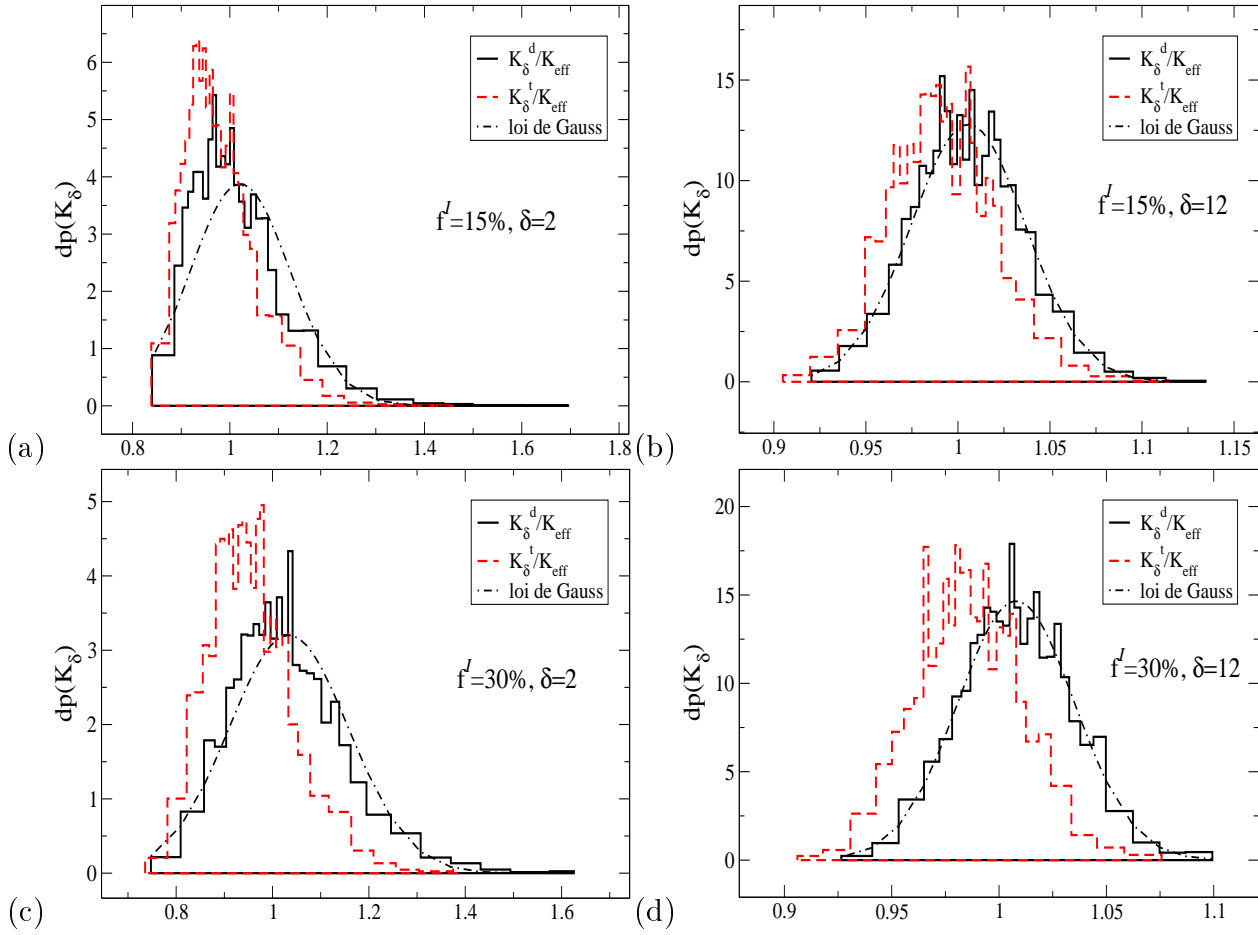


FIGURE 3.6 – Composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$). Densités de probabilité des modules de compressibilité plans normalisées K_δ^d/K_{eff} , K_δ^t/K_{eff} et densité gaussienne associée à K_δ^d/K_{eff} (a) $f^I = 15\%$, $\delta = 2$; (b) $f^I = 15\%$, $\delta = 12$; (c) $f^I = 30\%$, $\delta = 2$; (d) $f^I = 30\%$, $\delta = 12$.

composée soit d'une, soit de 3 voire plus rarement de 4 cellules. Dans le cas d'une seule cellule de Voronoï, le poids affecté au module calculé est inférieur en raison du faible volume que représente ce type de VE par rapport à la moyenne de tous les VE de calcul, ce qui donne une faible contribution des modules apparents dans l'allure finale de la densité de probabilité. Ces modules sont moins rigides que leur moyenne sur le VER $E(K_\delta^{d,t})$ en raison de la faible fraction volumique locale d'inclusions pour ce type de VE (inférieure à la fraction volumique moyenne f^I). Pour les VE à 3 ou 4 cellules, le phénomène inverse en ce qui concerne le poids et la rigidité du module de compressibilité plan apparent calculé se produit. En se fondant sur ces constatations, on en déduit que la partie centrale de la densité est liée aux VE à 2 cellules alors que ses queues inférieures et supérieures sont générées respectivement par

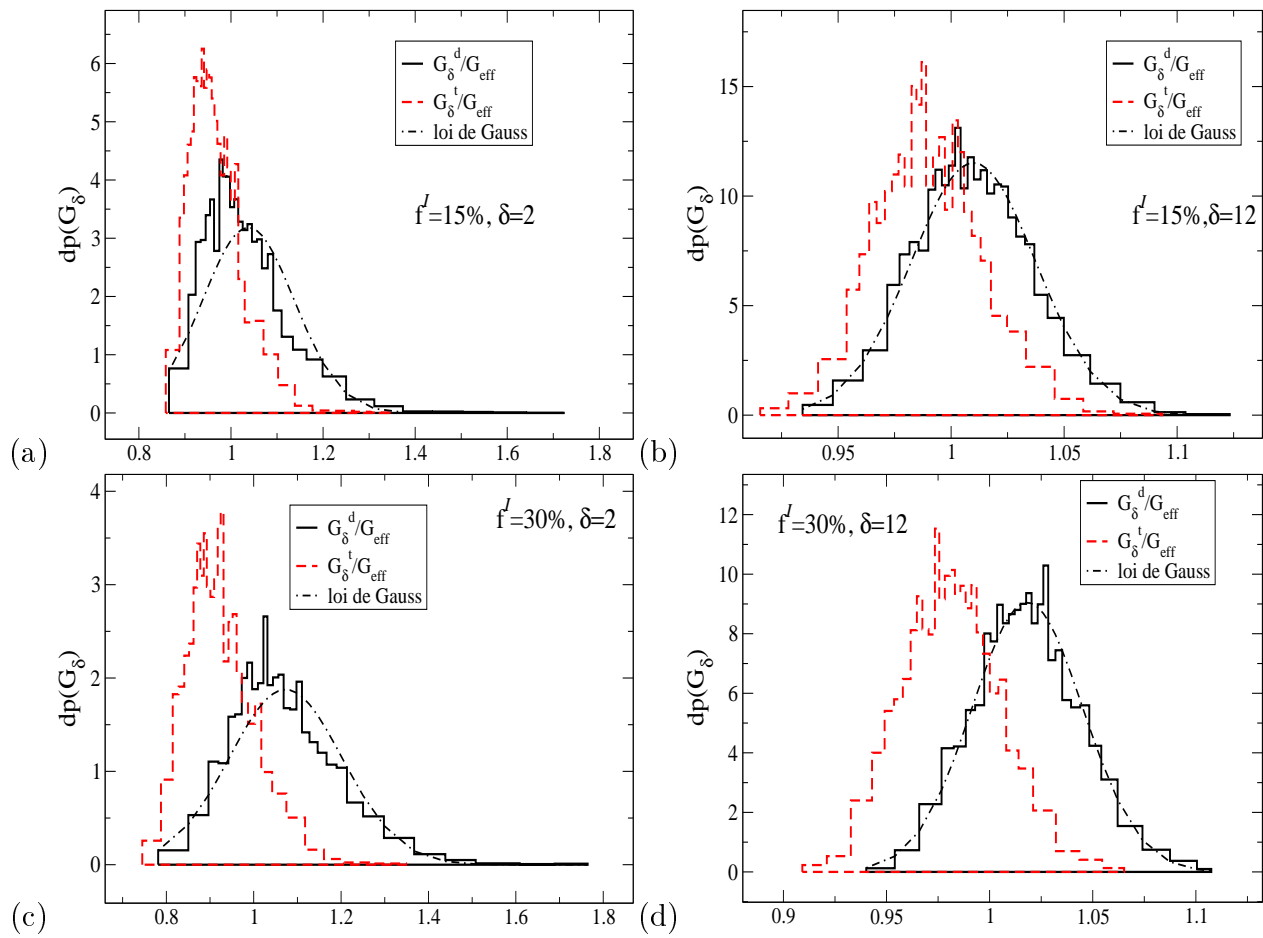


FIGURE 3.7 – Composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$). Densités de probabilité des modules de cisaillement normalisées G_δ^d/G_{eff} , G_δ^t/G_{eff} et densité gaussienne associée à G_δ^d/G_{eff} (a) $f^I = 15\%$, $\delta = 2$; (b) $f^I = 15\%$, $\delta = 12$; (c) $f^I = 30\%$, $\delta = 2$; (d) $f^I = 30\%$, $\delta = 12$.

les VE à 1 ou 3 et 4 cellules. Ceci explique pourquoi les densités de probabilité de $K_\delta^{d,t}(\omega)$ pour $f^I = 30\%$ sont plus proches d'une densité gaussienne à $\delta = 2$ qu'elles ne l'étaient pour $f^I = 15\%$.

De plus on constate que l'écart entre les densités de $K_\delta^d(\omega)$ et $K_\delta^t(\omega)$ augmente avec la fraction volumique d'inclusions, en cohérence avec la figure 3.2a, pour laquelle on observait que la quantité $\Delta Z_\delta^{VOR}/Z_\delta^{VOR}$ augmentait avec f^I .

Les mêmes tendances que celles observées sur la figure 3.6 sont obtenues dans le cas du module apparent de cisaillement plan d'un composite renforcé comme le montre la figure 3.7.

Pour les matériaux poreux, on obtient à nouveau les mêmes tendances que celles observées pour les composites renforcés par des particules rigides à l'exception du fait que l'écart entre les densités de probabilité des modules associés à des CLDA (par exemple la densité de K_δ^d) et des CLCH (par exemple la densité de K_δ^t) est plus important pour les matériaux poreux que pour les matériaux renforcés. Cette dernière remarque est bien sûr en cohérence avec les estimations obtenues par exemple en 1.8.2 où l'on avait constaté que les bornes de VOR associées aux modules apparents des matériaux poreux convergeaient plus lentement vers le comportement effectif que celles obtenues sur les composites renforcés par des particules rigides.

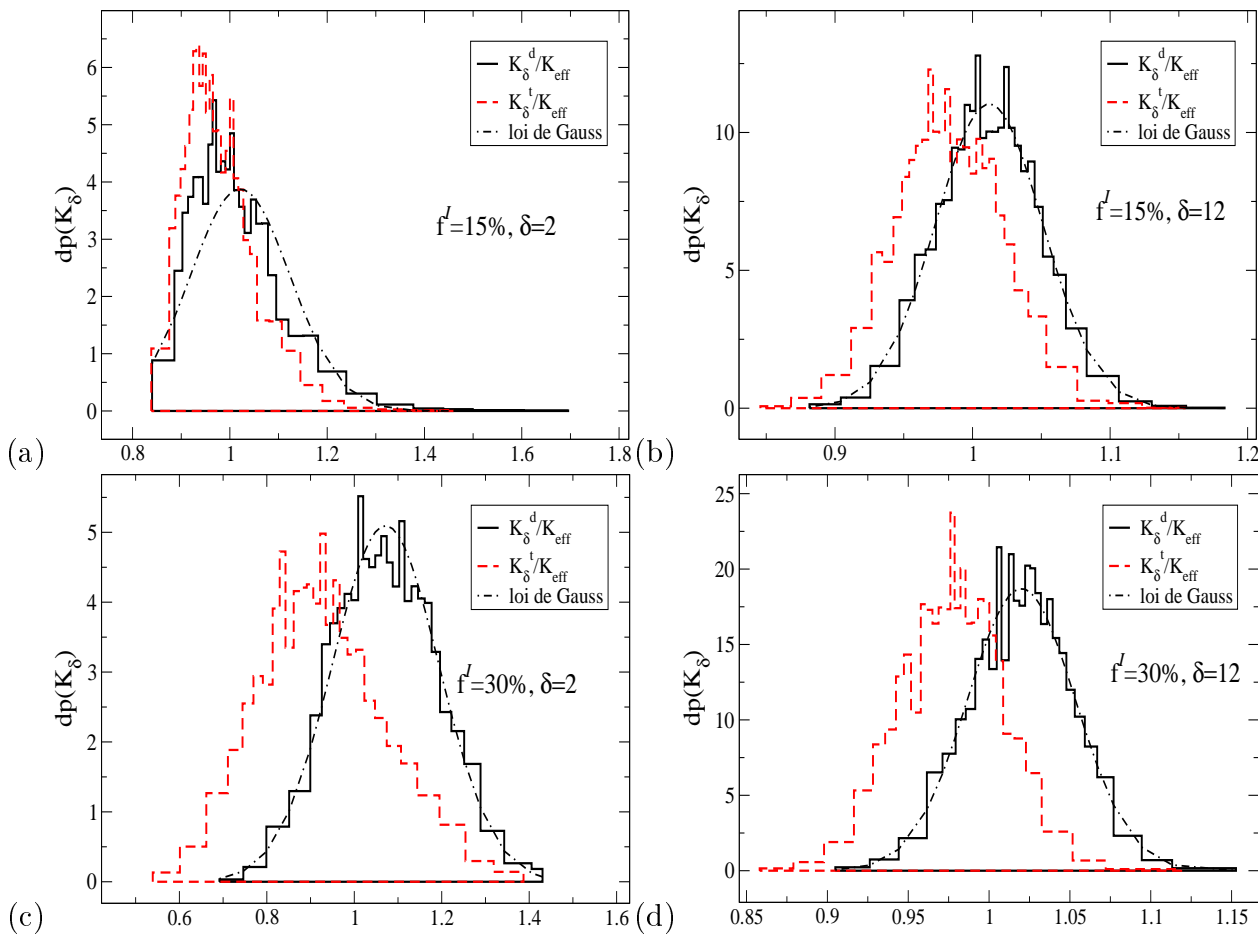


FIGURE 3.8 – Matériau poreux ($c = 10^{-4}$). Densités de probabilité des modules de compressibilité plans normalisés K_δ^d/K^{eff} , K_δ^t/K^{eff} et densité gaussienne associée à K_δ^d/K^{eff} (a) $f^I = 15\%$, $\delta = 2$; (b) $f^I = 15\%$, $\delta = 12$; (c) $f^I = 30\%$, $\delta = 2$; (d) $f^I = 30\%$, $\delta = 12$.

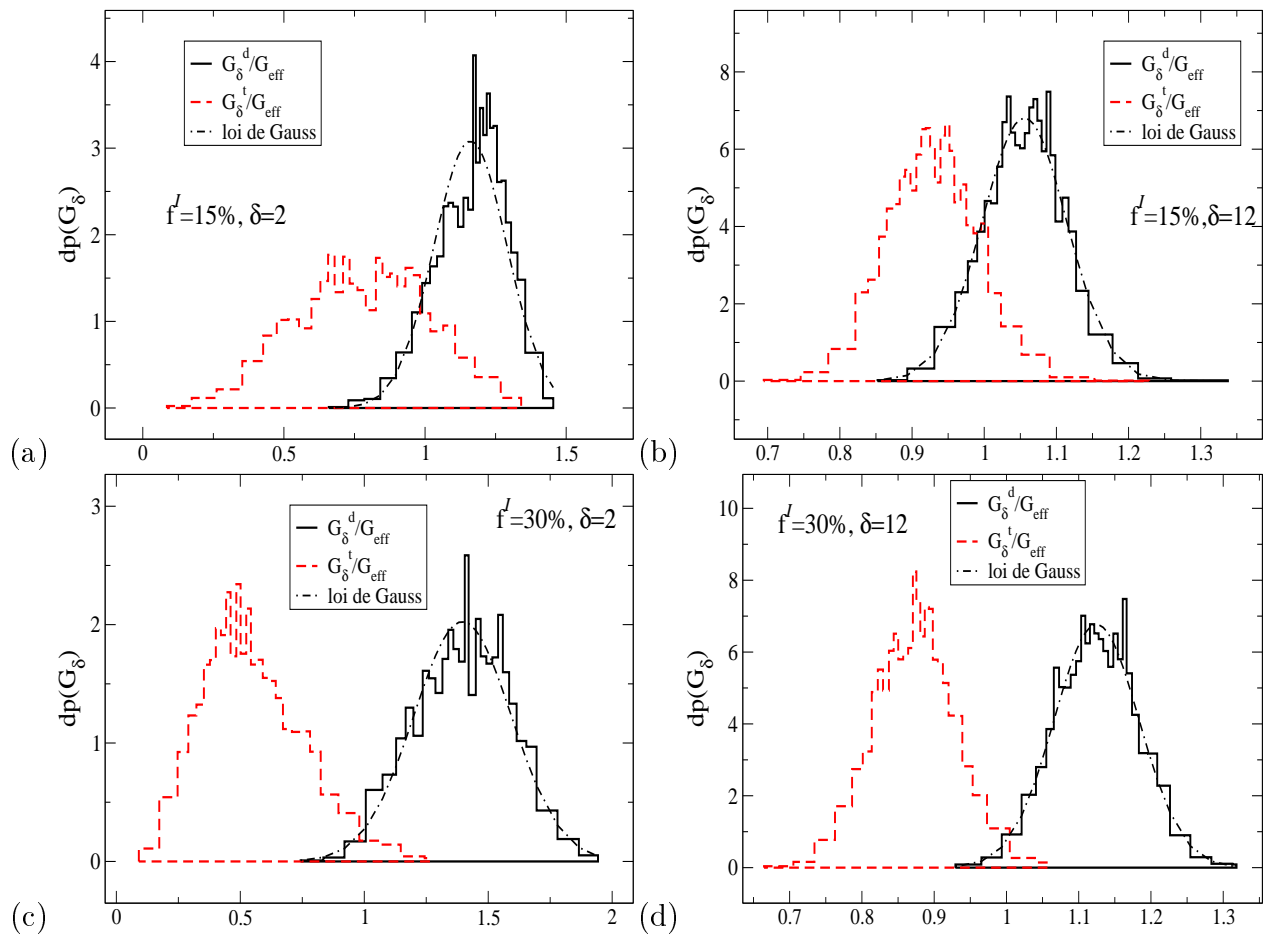


FIGURE 3.9 – Matériau poreux ($c = 10^{-4}$). Densités de probabilité des modules de cisaillement normalisés G_δ^d/G_{eff} , G_δ^t/G_{eff} et densité gaussienne associée à G_δ^d/G_{eff} (a) $f = 15\%$, $\delta = 2$; (b) $f^I = 15\%$, $\delta = 12$; (c) $f^I = 30\%$, $\delta = 2$; (d) $f = 30\%$, $\delta = 12$.

3.4.2 Matériaux biphasés

Dans le cas des matériaux biphasés à faible contraste ($c = 5$, $c = 1/5$), on retrouve à nouveau les mêmes tendances que celles observées pour les composites à contraste infini, à savoir une convergence des densités de probabilité (qui pour $\delta = 2$ présente une asymétrie positive) vers des densités gaussiennes dès que $\delta = 12$ et des densités de probabilité à $\delta = 2$ et $f^I = 30\%$ déjà assez proches d'une densité gaussienne pour les mêmes raisons que celles expliquées auparavant pour les composites renforcés par des particules rigides. Par ailleurs, la différence fondamentale entre les densités de probabilité des deux groupes de matériaux réside dans l'intensité de la variabilité représentée. En effet, nous constatons que l'étalement des densités de probabilité relatives aux matériaux biphasés est moins important que celui

des densités de probabilité associées aux matériaux à fort contraste, témoignant ainsi d'une variabilité moins importante. Cette remarque confirme l'observation effectuée sur l'évolution des CoV des modules apparents d'un matériau biphasé, représentée graphiquement sur les figures 3.4 et 3.5, qui montrent que leur variabilité est plus faible que celles des composites à contraste infini.

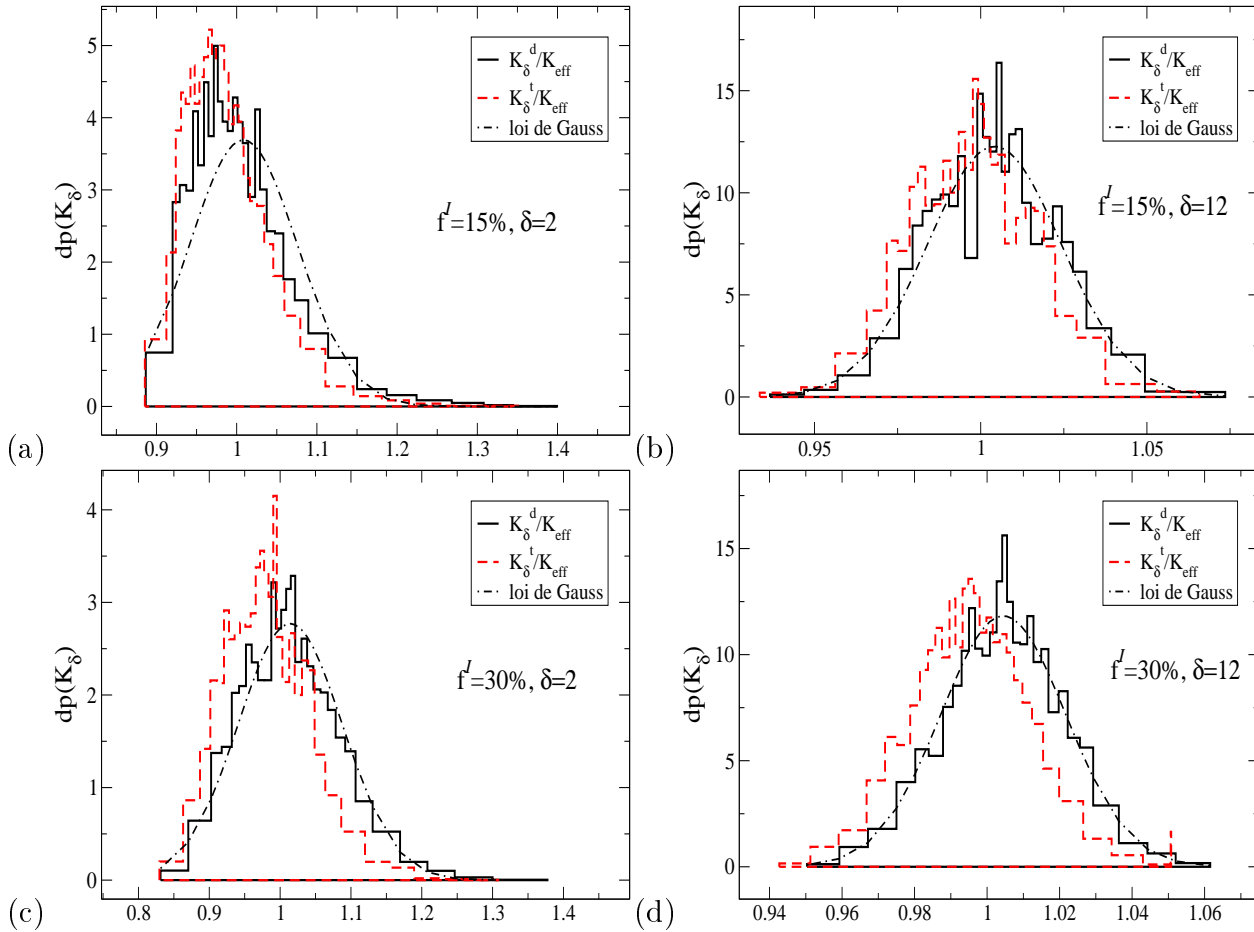


FIGURE 3.10 – Matériau biphasé ($c = 5$). Densités de probabilité des modules de compressibilité plans normalisés K_δ^d/K_{eff}^{eff} , K_δ^t/K_{eff}^{eff} et densité gaussienne associée à K_δ^d/K_{eff}^{eff} (a) $f^I = 15\%$, $\delta = 2$; (b) $f^I = 15\%$, $\delta = 12$; (c) $f^I = 30\%$, $\delta = 2$; (d) $f^I = 30\%$, $\delta = 12$.

On observe en particulier que l'étalement des densités de probabilité relatives aux matériaux poreux (et dans une moindre mesure aux matériaux renforcés par des particules rigides) est plus important que celui des densités de probabilité associées aux composites assouplis ($c = 1/5$) (resp. renforcés $c = 5$) notamment en ce qui concerne les modules apparents de cisaillement. Cela montre que la variabilité des modules apparents des matériaux poreux est plus importante que celle des composites assouplis ($c = 1/5$). La deuxième différence réside

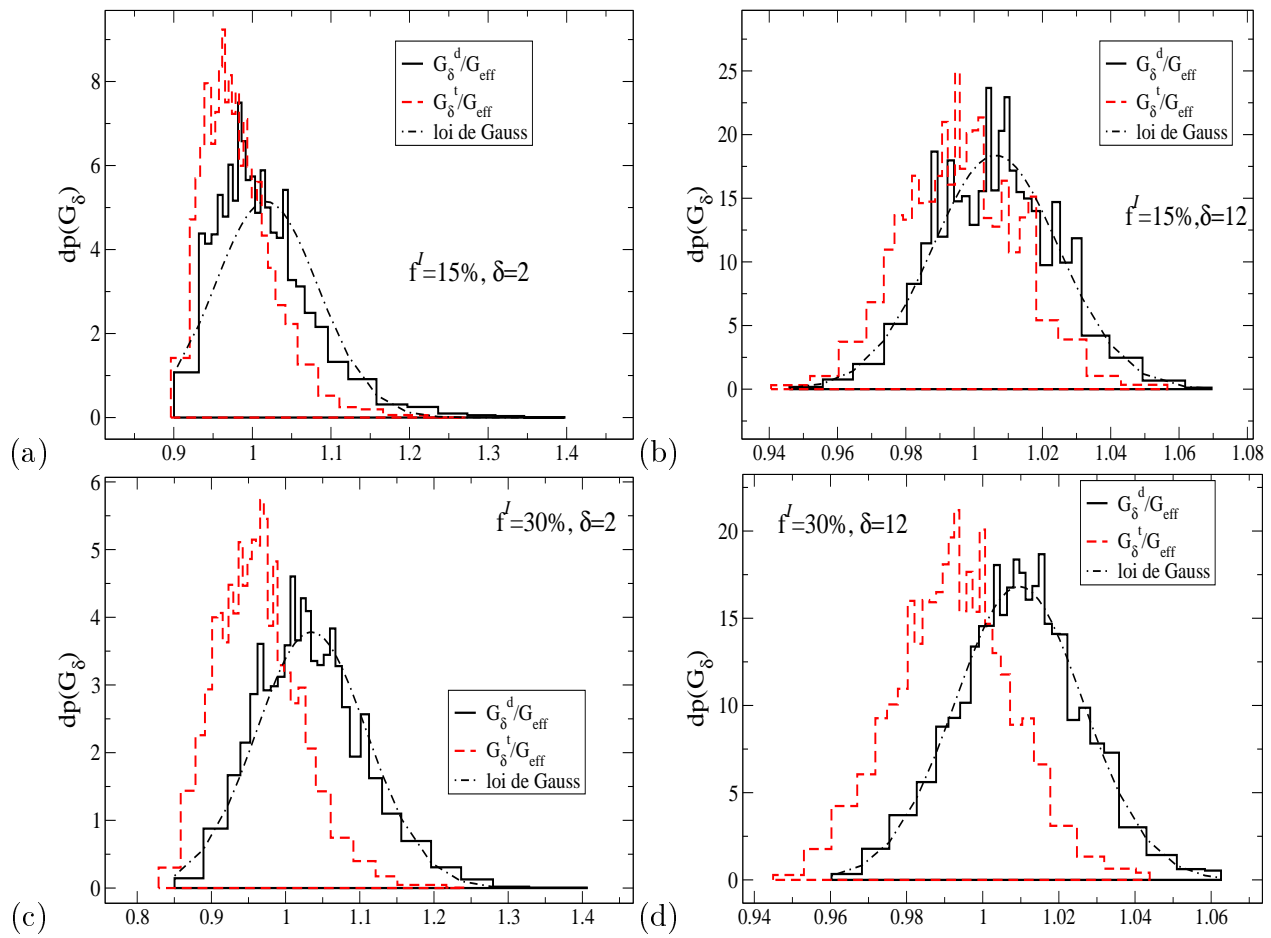


FIGURE 3.11 – Matériau biphasé ($c = 5$). Densités de probabilité des modules de cisailment normalisés G_δ^d/G_{eff} , G_δ^t/G_{eff} et densité gaussienne associée à G_δ^d/G_{eff} . Dans (a) $f^I = 15\%$, $\delta = 2$; (b) $f^I = 15\%$, $\delta = 12$; (c) $f^I = 30\%$, $\delta = 2$; (d) $f^I = 30\%$, $\delta = 12$.

dans l'écart séparant les densités de probabilité issues des deux types de CL appliquées, qui est assez faible pour les composites à faible contraste et en tout cas bien inférieur à celui observé pour les composites à contraste infini, confirmant ainsi les constatations faites en 3.3.1 sur les faibles valeurs des fluctuations $\frac{\Delta Z_\delta^{VOR}}{Z_\delta^{VOR}}$ dans le cas des matériaux biphasés. Dans le cas des biphasés, l'effet des fluctuations individuelles des microstructures domine toujours l'effet des CL.

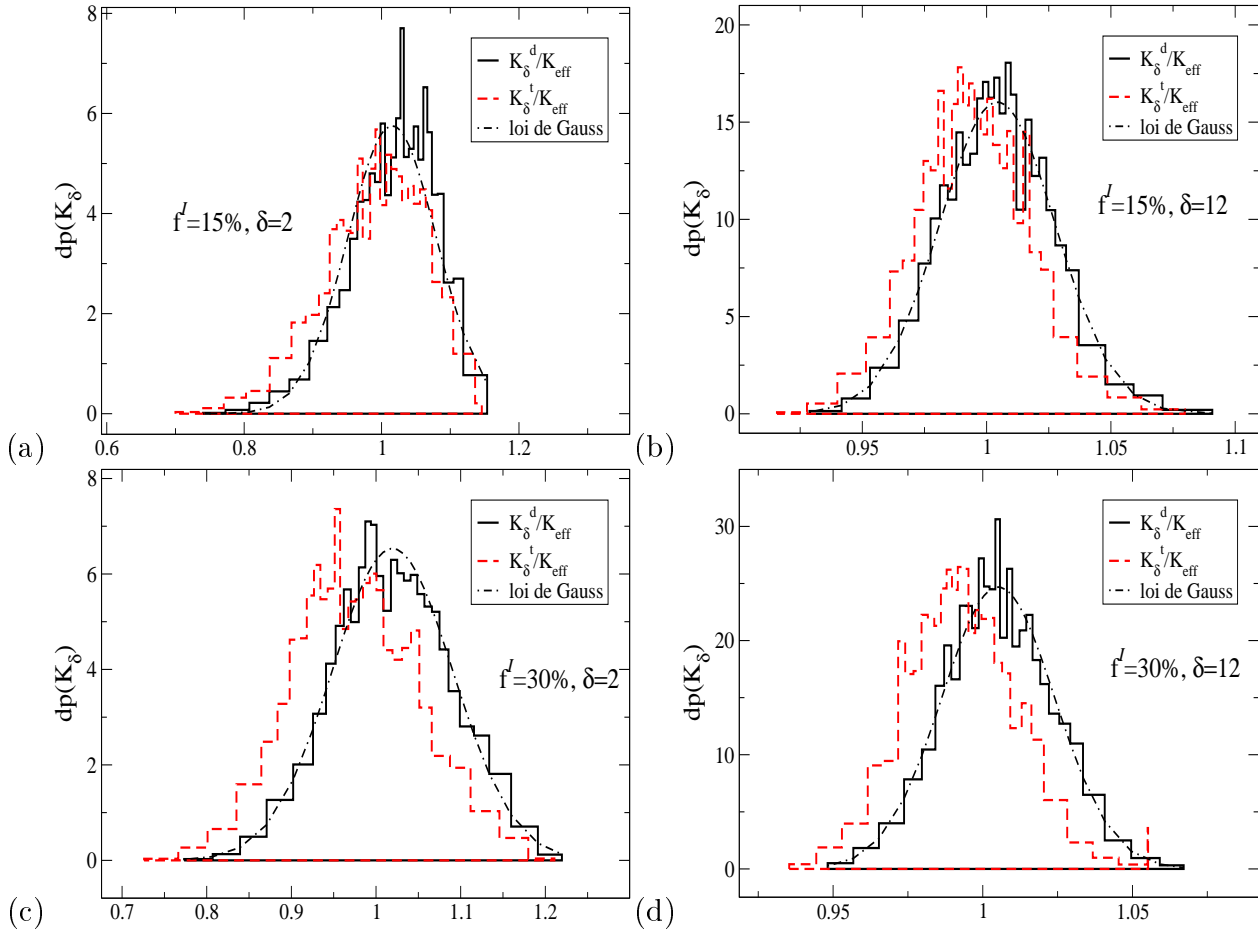


FIGURE 3.12 – Matériau biphasé ($c = 1/5$). Densités de probabilité des modules de compressibilité plans normalisées K_δ^d/K_{eff} , K_δ^t/K_{eff} et densité gaussienne associée à K_δ^d/K_{eff} (a) $f^I = 15\%$, $\delta = 2$; (b) $f^I = 15\%$, $\delta = 12$; (c) $f^I = 30\%$, $\delta = 2$; (d) $f^I = 30\%$, $\delta = 12$.

3.5 Résultats : Écart à l'isotropie

Afin de caractériser l'anisotropie des comportements apparents des matériaux étudiés, nous nous sommes intéressés aux mesures statistiques $\Delta_{iso}^{d/t}$ définies par (3.7) qui caractérisent l'écart à l'isotropie des comportements apparents. L'évolution de ces mesures en fonction de la taille du VER a été calculée pour les composites à contrastes infinis et à faibles contrastes pour 2 fractions volumiques différentes ($f^I = 15\%$, $f^I = 30\%$) et est représentée graphiquement sur les figures 3.14 et 3.15.

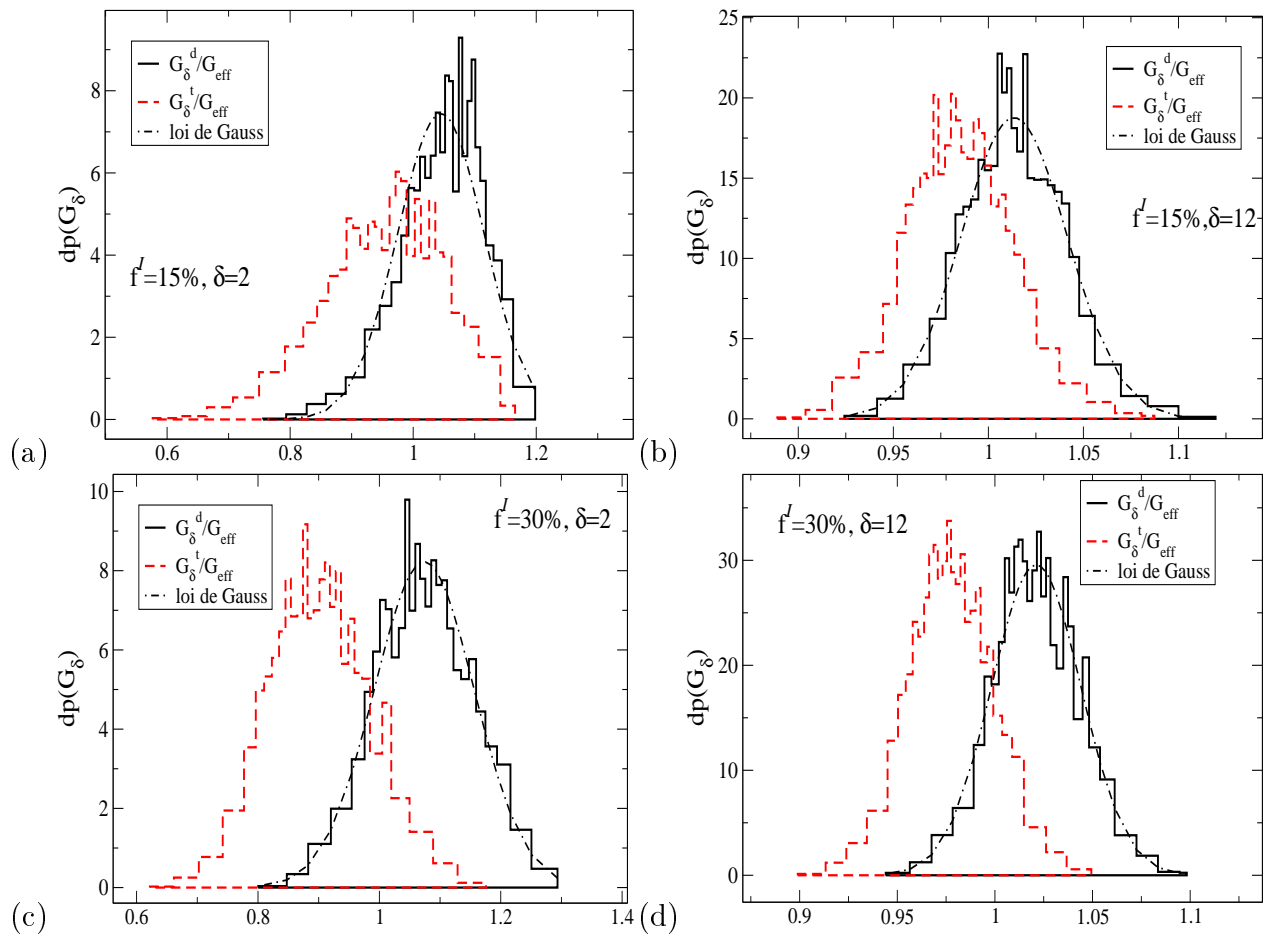


FIGURE 3.13 – Matériau biphasé ($c = 1/5$). Densités de probabilité des modules de cisaillement normalisés G_δ^d/G^{eff} , G_δ^t/G^{eff} et densité gaussienne associée à G_δ^d/G^{eff} (a) $f^I = 15\%$, $\delta = 2$; (b) $f^I = 15\%$, $\delta = 12$; (c) $f^I = 30\%$, $\delta = 2$; (d) $f^I = 30\%$, $\delta = 12$.

3.5.1 Contrastes infinis

On constate tout d'abord que toutes les courbes tendent assez rapidement vers 0 quand δ augmente. Cela indique que la plupart des réalisations individuelles sont quasiment isotropes pour des valeurs de δ relativement faibles même si cette tendance est moins prononcée dans le cas des matériaux poreux que dans le cas des composites renforcés de façon rigide. De plus, en accord avec les résultats préalablement observés sur les comportements effectifs et la variabilité des comportements apparents, on constate à nouveau que l'influence des CL et des fluctuations individuelles de la microstructure est plus forte dans le cas des matériaux poreux que dans le cas des composites renforcés par des particules rigides. En effet, les mesures d'écart à l'isotropie concernant les matériaux poreux sont quasiment de l'ordre de

10 fois celles correspondant aux composites renforcés de façon rigide. On observe par ailleurs pour les deux types de matériaux une anisotropie plus forte pour une fraction volumique d'inclusions de 30% que pour $f^I = 15\%$. Ce résultat s'explique par le fait que l'anisotropie est principalement engendrée par les effets d'interaction entre les fibres rigides ou entre les pores qui sont renforcés avec l'augmentation de la fraction volumique. On constate aussi que l'anisotropie pour le composite renforcé est plus prononcée dans le cas de CLDA que dans celui des CLCH alors que l'on observe l'inverse pour les matériaux poreux.

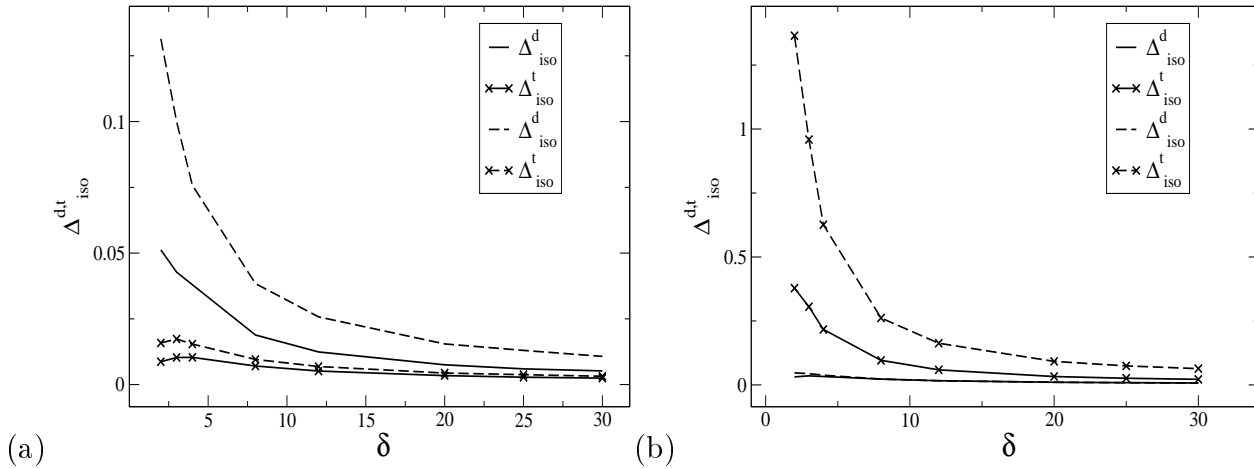


FIGURE 3.14 – Evolution de l'écart à l'isotropie $\Delta_{iso}^{d/t}$ en fonction de δ dans le cas d'un composite renforcé (a) et d'un matériau poreux (b). Les lignes continues désignent la fraction volumique $f^I = 15\%$ et les lignes discontinues sont relatives au cas $f^I = 30\%$.

3.5.2 Matériaux biphasés

Dans le cas du matériau biphasé, on observe les mêmes tendances que pour les composites à contraste infini, à 3 nuances près. D'une part, l'ordre de grandeur de l'écart à l'isotropie est le même pour le composite renforcé ($c = 5$) que pour le composite assoupli ($c = 1/5$). D'autre part, les valeurs des $\Delta_{iso}^{d/t}$ sont nettement plus petites pour les biphasés à faible contraste que pour les composites à contraste infini, notamment pour les matériaux poreux. En effet, pour les composites à faible contraste, quasiment toutes les réalisations des VE $B_\delta(\omega)$ conduisent à des comportements apparents isotropes dès que $\delta = 4$. Enfin, l'effet des CL sur l'anisotropie est moins marqué.

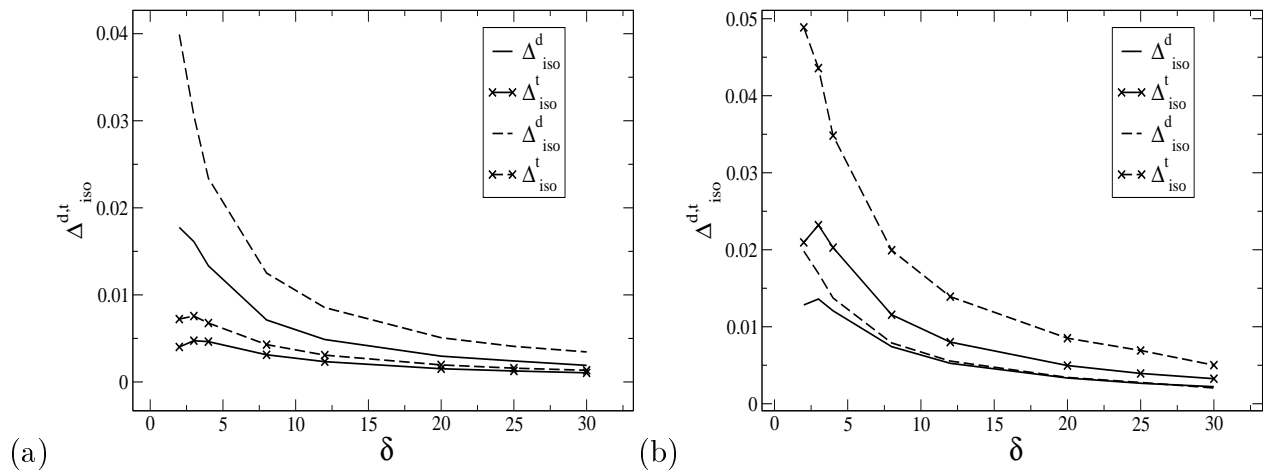


FIGURE 3.15 – Evolution de l'écart à l'isotropie $\Delta_{iso}^{d/t}$ en fonction de δ dans le cas de matériaux biphasés représentant un contraste de $c = 5$ (a) et $c = 1/5$ (b). Les lignes continues désignent la fraction volumique $f^I = 15\%$ et les lignes discontinues sont relatives au cas $f^I = 30\%$.

3.6 Conclusion

Nous fondant sur l'approche présentée au chapitre 2, nous avons mené une étude statistique du comportement apparent de matériaux hétérogènes de type matrice-inclusions à fort et faible contrastes pour différentes tailles de VE et 2 fractions volumiques f^I d'inclusions. Dans cette optique, nous nous sommes intéressés à l'évolution en fonction de δ des fluctuations $CoV(Z)$, $\Delta Z^{VOR}/Z$, des densités de probabilité des modules apparents de compressibilité plane et de cisaillement ($Z = K, G$) et des écarts à l'isotropie du comportement apparent $\Delta_{iso}^{d/t}$. Comme on s'y attendait, nous avons effectivement constaté que la variabilité des modules apparents diminue en fonction de la taille du VE de calcul. Une quantification de cette diminution sera effectuée au chapitre 4 à travers le calcul de tailles de VER réalisé à l'aide de différents critères intégrant entre autres les fluctuations des propriétés apparentes. Comme mentionné dans de nombreux travaux, e.g. Kanit et al [33], nous constatons également que la diminution de la variabilité dépend du matériau considéré (le contraste entre les phases, sa morphologie, la fraction volumique des inclusions), et de la propriété étudiée (module de compressibilité plan ou de cisaillement).

En plus de son importance dans la détermination de la taille d'un VER, la connaissance de la statistique du comportement apparent peut s'avérer également utile dans le cas où le VER n'existe pas, par exemple quand les hypothèses de stationnarité de la microstructure ou de séparation d'échelles ne sont pas vérifiées. Prenons par exemple la situation que nous

avons rencontrée dans la section 3.4 où les densités de probabilité des modules apparents convergent pour tous les matériaux que nous avons étudiés vers une densité gaussienne dès que $\delta = 12$, voire même pour des valeurs plus faibles. Ce résultat peut être utile lorsque la convergence d'une propriété vers le comportement effectif se produit pour une valeur de δ notée δ_{VER} plus importante que, celle notée δ_{dp} , nécessaire à la convergence de ses densités de probabilité vers une densité gaussienne. En effet, pour ce type de situation, si l'hypothèse de séparation d'échelles n'est pas satisfaite pour un problème donné de calcul de structures, c'est-à-dire si la taille des éléments finis nécessaires pour obtenir la solution du problème à une précision donnée est inférieure à la taille du VER, il est alors possible de résoudre ce problème en utilisant des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis stochastiques en utilisant des VE de taille δ_{dp} pour lesquels le comportement apparent est gaussien. Bien sûr, la taille δ_{dp} des éléments finis, qui est inférieure à celle du VER doit être suffisamment petite pour permettre un calcul des structures aboutissant à une précision raisonnable. Les valeurs des espérances et écart-type utilisées dans ce calcul et qui caractérisent complètement la distribution gaussienne seraient alors déterminées par une étude statistique de la distribution des modules apparents réalisée à $\delta = \delta_{dp}$.

Chapitre 4

Tailles de VER

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'exploitation des résultats présentés précédemment aux chapitres 1 et 3 en vue d'élaborer et d'appliquer des critères de taille de VER. Rappelons en effet que l'intérêt de calculer un comportement effectif est de pouvoir remplacer un milieu hétérogène par un milieu homogène équivalent présentant ce comportement effectif. Une telle opération simplifie considérablement la représentation du milieu réel et évite ainsi de recourir à des calculs EF à double échelle pour analyser des structures réalisées en matériaux composites à microstructures aléatoires, calculs qui pour l'instant ont des coûts numériques prohibitifs. Pour pouvoir effectuer ce remplacement, la notion de VER est d'une importance fondamentale.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de définir et de calculer la taille du VER en utilisant des critères reposant sur les comportements apparents. Au vu des résultats présentés précédemment, nous avons remarqué une grande variabilité des comportements apparents $C_\delta^{d,t}$ en fonction de plusieurs paramètres dont les CL, la fraction volumique d'inclusions, le module apparent considéré, etc... Comme cela a déjà été remarqué par de nombreux auteurs (Kanit et al [33]), nous pouvons ainsi nous attendre à une taille de VER dépendant des mêmes paramètres ainsi que de la précision souhaitée.

Dans la littérature, il existe de nombreuses définitions du VER. En particulier, Hill définit la notion de VER dans ses travaux sur les propriétés élastiques effectives des composites renforcés [28] en considérant deux points essentiels : « a sample that (a) is structurally en-

tirely typical of the whole mixture on average, and (b) contains a sufficiently large number of inclusions for the apparent overall moduli to be effectively independent of surface values of traction and displacement, as long as these values are macroscopically uniform ». Cette première définition du VER comporte deux idées essentielles sous-jacentes à la notion de VER : la représentativité statistique de la microstructure et l'indépendance du comportement moyen du VER vis-à-vis du détail des CL qui lui sont appliquées tant que les moyennes spatiales des CL demeurent uniformes à une échelle plus grande. Cette notion de CL macro-homogènes est associée à la décomposition de la variation du chargement mécanique en deux échelles distinctes [4]. Ce principe de séparation d'échelles dans la définition du VER a été repris par Hashin [22] pour qui le VER doit être assez grand pour contenir suffisamment d'informations sur sa microstructure pour être représentatif de cette dernière mais qui doit cependant être suffisamment petit par rapport à la structure macroscopique. Dans sa définition, Hill rajoute par rapport à Hashin la condition d'indépendance vis-à-vis des CL permettant ainsi de définir un unique comportement effectif. On remarquera que ces définitions sont qualitatives et n'indiquent pas comment calculer concrètement la taille du VER. Une caractéristique importante de ces définitions consiste en le fait que toutes les deux considèrent que toute réalisation d'un VE du matériau hétérogène de la taille du VER peut être remplacée par un milieu homogène effectif équivalent. Les conditions d'existence d'un tel comportement effectif ont été établies d'un point de vue théorique par plusieurs auteurs. Comme le fait remarquer Ostoja-Starjewski [44], le VER est clairement défini dans deux cas : celui d'une microstructure périodique [53] et celui où la microstructure du matériau hétérogène est stationnaire et ergodique [45, 52]. Notre travail correspond à cette deuxième situation.

Plutôt que de chercher à décrire le VER à partir d'une unique réalisation d'un VE du matériau hétérogène, une autre façon de le définir consiste à considérer le matériau hétérogène comme un processus statistique et à chercher uniquement à obtenir les propriétés effectives qui relient les moyennes d'ensemble des champs mécaniques sans tenir compte des fluctuations individuelles des comportements apparents d'une réalisation à une autre. C'est ce point de vue qui est adopté dans les travaux de Drugan et Willis [15] qui définissent le VER comme « le plus petit volume élémentaire du composite pour lequel la représentation habituelle des propriétés macroscopiques de ce VE par des modules effectifs (spatialement) constants est suffisamment précise pour représenter la moyenne d'ensemble de la réponse du composite ». Cette définition du VER permet, à l'aide de calculs sophistiqués, d'évaluer sa taille analytiquement [15, 39, 40].

Un troisième point de vue plus pratique, permettant de définir le VER et plus particulièrement sa taille repose sur l'évaluation des propriétés effectives d'un matériau hétérogène à partir du calcul des propriétés apparentes associées à des cellules unitaires dont les microstructures sont générées par des simulations de Monte-Carlo (e.g [46, 20, 43, 54, 33, 19, 46, 16]). L'objectif poursuivi est de déterminer la taille minimale d'un VE de calcul de sorte que la moyenne des propriétés apparentes évaluée pour un nombre suffisamment élevé de réalisations de sa microstructure converge vers le comportement effectif. Un exemple représentatif de ce type d'approche est fourni par les travaux de Kanit et al [33] qui utilisent les notions de portée intégrale et d'intervalle de confiance pour obtenir une relation analytique reliant l'erreur relative associée à la propriété effective recherchée à la taille du VE et le nombre de réalisations. Cette relation permet ainsi de prévoir le nombre de VE virtuels nécessaires pour atteindre une précision donnée et inversement de calculer l'erreur relative à un nombre de réalisations donné. En appliquant cette procédure au cas d'un matériau biphasé aléatoire à comportement linéaire, Kanit et al [33] ont montré que la taille du VER définie de cette manière ne dépend pas seulement de la microgéométrie (morphologie et fraction volumique) des phases du composite, mais aussi de la propriété physique recherchée, du contraste entre les phases constitutives du matériau et surtout de l'erreur relative associée au calcul.

Les définitions et les analyses que nous venons de mentionner ainsi que d'autres définitions du VER qui sont rappelées dans Gitman et al [18] conduisent à différentes tailles de VER même dans le cas où les propriétés matérielles et la morphologie du composite ainsi que la précision souhaitée sont similaires. Considérons par exemple les travaux d'Ostoja-Starjewski [43] réalisés pour un composite biphasé de type matrice-fibres longues cylindriques à comportement linéaire. L'auteur obtient pour un tel matériau des tailles de VER assez grandes allant de $\delta = 10$ jusqu'à $\delta = 50$ selon les contrastes considérés. Ces tailles de VER sont calculées pour une erreur relative évaluée à 5% et correspondent à des matériaux de fraction volumique d'inclusion $f^I = 20\%$ et présentant un contraste entre les phases allant de $c = 10^2$ à $c = 10^4$. A l'autre bout de l'échelle, les travaux de Drugan et Willis [15] conduisent pour la même précision de 5% et pour le même type de composites cette fois-ci non pas renforcé par des fibres longues mais par des inclusions sphériques des tailles de l'ordre de $\delta = 2$ pour tous les contrastes et pour toute fraction volumique $f^I < 40\%$. L'importante différence observée entre les tailles de VER calculées pour le même type de composite et la même précision dans ces deux dernières études s'explique par la différence de point de vue et de définition adoptés concernant la notion de VER qui, comme nous pouvons le constater au vu des divers résultats et études mentionnées, reste un sujet de recherche actuel.

L'objectif de ce chapitre consiste à proposer de nouvelles pistes dans l'évaluation de la taille du VER. Pour cela, nous présentons des critères de tailles de VER fondés sur l'étude statistique portant sur le comportement apparent de VE de tailles δ calculés à l'aide de la nouvelle méthodologie présentée au chapitre 1. Pour définir ces critères, nous adoptons deux points de vue différents concernant la notion de VER. Le premier point de vue considère que la taille du VER correspond à la taille minimale des VE nécessaires pour calculer les propriétés effectives du matériau considéré. Concernant ce premier point de vue, on pourrait parler de VER de calcul puisque l'objectif visé est uniquement de calculer numériquement les propriétés effectives d'un milieu macrohomogène. Comme exemple d'application du premier point de vue, on peut citer les critères de VER de calcul obtenus dans [31, 43, 44, 15, 20, 33, 18]. Le deuxième point de vue considère que la taille du VER est atteinte lorsqu'il devient possible de remplacer le matériau hétérogène par un matériau homogène équivalent dans un problème de calcul de structure avec une seule réalisation de la microstructure. Ce deuxième point de vue exige la vérification de l'hypothèse de séparation d'échelles. Les définitions de VER fournies par Hill [28] et Hashin [22] illustrent ce second point de vue. Etant donné que le deuxième point de vue ne se satisfait pas uniquement, comme le premier point de vue, de la convergence en moyenne vers les propriétés effectives mais nécessite que la plupart des réalisations individuelles de VE de la taille du VER fournisse une estimation pertinente du comportement effectif (en exigeant que les fluctuations individuelles soient suffisamment faibles), le deuxième point de vue est donc plus exigeant que le premier et devrait conduire a priori à des tailles de VER plus importantes que celles associées au premier point de vue. On remarque que les deux points de vue considérés définissent le VER uniquement de façon qualitative. Pour obtenir des tailles de VER, nous avons besoin de recourir à des spécifications quantitatives. A cette intention, la connaissance de la statistique des comportements apparents (même partielle) se révèle fort utile car elle permet de quantifier non seulement leurs moyennes, mais aussi leurs fluctuations : quantités qui vont nous servir à formuler au cours de ce chapitre quelques propositions de critères de taille de VER. Bien entendu, tout au cours de ce chapitre, les valeurs moyennes des comportements apparents ainsi que leur statistique ont été obtenues à l'aide de la nouvelle méthodologie présentée puis mise en application aux chapitres 1 et 3.

4.2 VER de calcul basé sur l'indépendance des CL

Dans cette partie, nous considérons le premier point de vue mentionné dans l'introduction pour définir ce que nous avons appelé un VER de calcul dont la taille correspond à la taille minimale requise pour calculer à une précision donnée les propriétés effectives du composite. Un critère de VER de calcul très simple est obtenu en considérant que la taille minimale du VER lié à une propriété Z donnée est atteinte pour une précision donnée ε quand les fluctuations $\Delta Z_\delta^{VOR}/Z_\delta^{VOR}$ dues aux CL et définies par l'équation (3.6) satisfont $\Delta Z_\delta^{VOR}/Z_\delta^{VOR} \leq \varepsilon$. Comme nous l'avons remarqué dans la section 3.2, les fluctuations $\Delta Z_\delta^{VOR}/Z_\delta^{VOR}$ et par conséquent le critère de VER associé à ces fluctuations ne prennent en compte que l'influence des CL puisque les effets des fluctuations individuelles d'une réalisation à une autre sont supprimés par les moyennes d'ensemble effectuées sur les modules apparents $Z_\delta^{d/t}(\omega)$ pondérés par le poids de chaque réalisation. Cependant cette définition de taille de VER reste approximative puisqu'elle ne prend en compte aucune information portant sur la précision utilisée pour évaluer les moyennes d'ensemble des comportements apparents. Afin de remédier à cette limitation, nous avons légèrement modifié le critère de VER en intégrant la notion d'Intervalle de Confiance (IC) que nous avons introduite en 1.5.6. Comme nous l'avons vu dans cette section, la définition de l'IC implique

$$P(Z_{\delta,est}^- \leq Z^{\text{eff}} \leq Z_{\delta,est}^+) \geq 1 - \alpha. \quad (4.1)$$

où

$$Z_{\delta,est}^+ = \overline{Z_\delta^d} + \ell^{CI}(E(Z_\delta^d)), \quad Z_{\delta,est}^- = \left(\overline{1/Z_\delta^t} + \ell^{CI}(E(1/Z_\delta^t)) \right)^{-1}, \quad (4.2)$$

pour $Z = K$ ou G et où $\ell^{CI}(E(X))$ désigne la moitié de la longueur de l'IC de niveau $(1 - \alpha)$ de l'espérance $E(X)$.

A partir de l'équation (4.1), nous introduisons une définition plus pertinente de la taille du VER $\delta_{BC}(Z)$ associée à une propriété Z (correspondant par exemple au module de compressibilité plan ou de cisaillement) pour une précision ε donnée :

$$\delta_{BC}(Z) = \min_{\delta} \left\{ \delta, \frac{\Delta Z_\delta^{eff}}{Z_\delta^{eff}} < \varepsilon \right\} \quad \text{où} \quad Z_\delta^{eff} = \frac{Z_{\delta,est}^+ + Z_{\delta,est}^-}{2}, \quad \Delta Z_\delta^{eff} = \frac{Z_{\delta,est}^+ - Z_{\delta,est}^-}{2}. \quad (4.3)$$

L'interprétation probabiliste du critère (4.3) au vu de la relation (4.1) est la suivante. La probabilité pour que l'erreur relative $\Delta Z_\delta^{eff}/Z_\delta^{eff}$ portant sur la propriété effective Z_δ^{eff} soit inférieure à ε est supérieure à $(1 - \alpha)$ pour $\delta \geq \delta_{BC}$. Avec une telle définition du critère de

VER (4.3), on s'attend à ce que la valeur de δ_{BC} ne dépende pas uniquement de la propriété considérée Z mais aussi des deux précisions (ε, α) , du nombre de réalisations n (à travers le calcul de l'IC) ainsi que de la fraction volumique des inclusions f^I et du contraste entre les phases c .

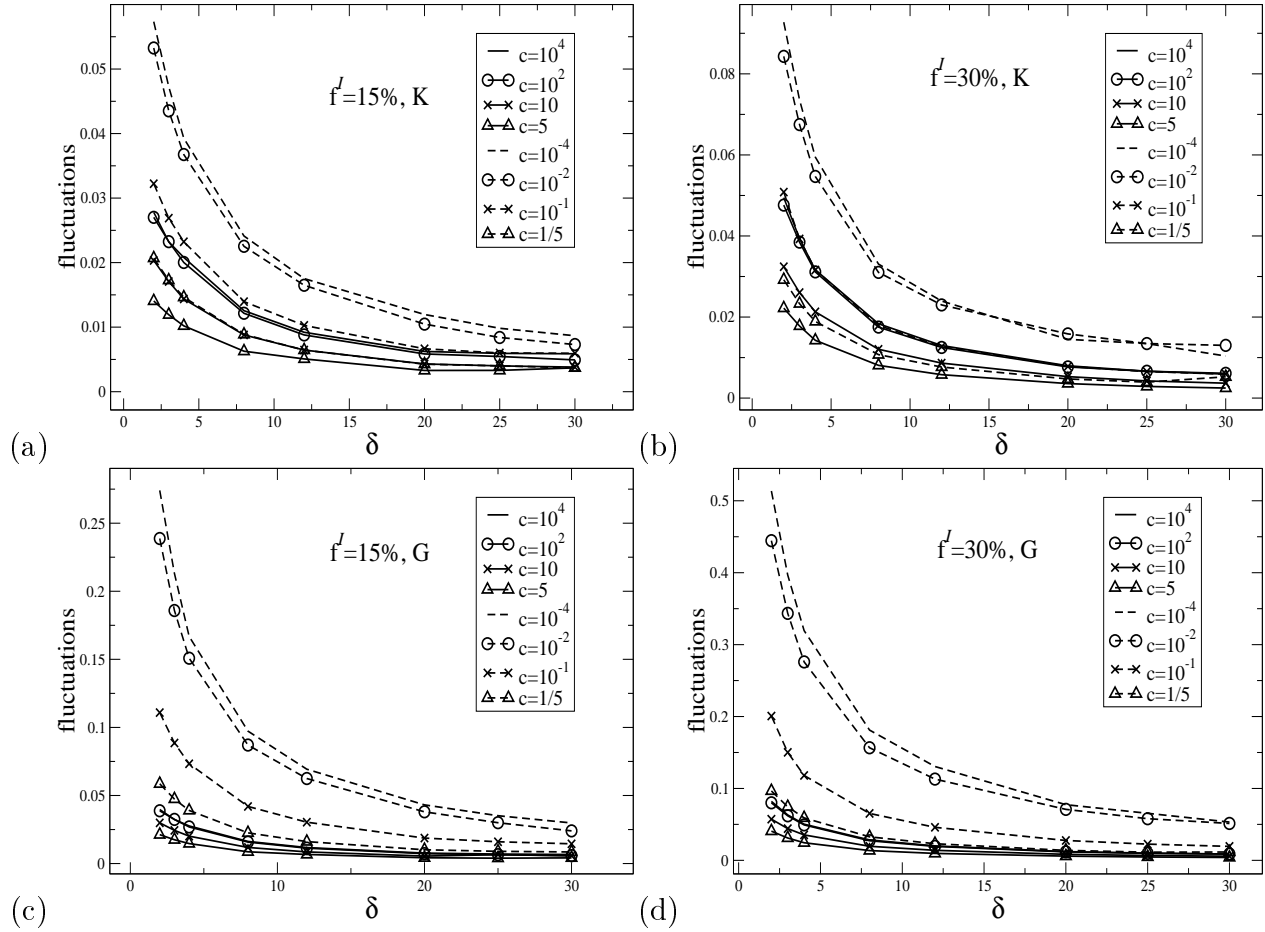


FIGURE 4.1 – Evolution des fluctuations $\Delta Z_{\delta}^{eff}/Z_{\delta}^{eff}$ en fonction de δ pour différents contrastes. Fluctuations du module de compressibilité plan, $f^I = 15\%$ (a) et $f^I = 30\%$ (b). Fluctuations du module de cisaillement, $f^I = 15\%$ (c) et $f^I = 30\%$ (d).

Pour toutes les applications numériques réalisées dans ce chapitre, nous considérons un IC de niveau 0.99 ($\alpha = 0.01$). Par ailleurs, comme c'était le cas des chapitres 1 et 3, le nombre de réalisations est fixé à $n = 2000$ pour $2 \leq \delta < 20$ et $n = 1000$ pour $20 \leq \delta \leq 30$. Pour ces valeurs de n et de α , le paramètre de Student $t(\alpha, n)$ vaut $t(0.01, n) = 2.56 \forall n \geq 100$. Les applications numériques sont effectuées sur le même type de composites de type fibres-matrice qui ont été considérés dans les chapitres précédents. Les simulations des composites ont été réalisées pour 8 contrastes différents ($c = 10^{-4}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1/5, 5, 10, 10^2, 10^4$)

et deux fractions volumiques ($f^I = 15\%, 30\%$). Nous avons tout d'abord reporté sur la figure 4.1 l'évolution des fluctuations $\Delta Z_\delta^{eff}/Z_\delta^{eff}$ sur lesquelles repose le critère de VER en fonction de δ pour tous les contrastes et fractions volumiques considérées et pour $Z = K$ et G . Comme on pouvait s'y attendre, les évolutions de ces fluctuations sont très similaires à celles observées sur les fluctuations $\Delta Z_\delta^{VOR}/Z_\delta^{VOR}$ qui ont été reportées en échelle logarithmique et commentées dans la partie 3.3. La figure 4.2 donne l'évolution de la taille des VER δ_{BC} associées aux fluctuations $\Delta Z_\delta^{eff}/Z_\delta^{eff}$ pour le module de compressibilité plan (figure 4.2a) et pour le module de cisaillement (figure 4.2b) en fonction du contraste pour 3 niveaux de précision ($\varepsilon = 1\%, 2\%, 5\%$). Pour toutes les courbes présentées dans ce chapitre, dans les situations où le VER n'est pas encore atteint à $\delta = 30$ pour un composite et une précision donnés, la taille de VER δ_{BC} n'est pas reportée sur la figure. De la même manière, lorsque le VER est déjà atteint à $\delta = 2$, la valeur δ_{BC} reportée sur la courbe est fixée à 2.

Pour une précision et une fraction volumique d'inclusions f^I données, la figure 4.2, en accord avec les observations effectuées dans la partie 1.8, montre que la taille du VER associée au module de cisaillement est toujours supérieure à celle associée au module de compressibilité plan. D'autre part, comme on le prévoyait dès le départ et en accord avec toutes les observations effectuées aux chapitres 1 et 3, les valeurs maximales de tailles de VER sont atteintes dans le cas des forts contrastes entre les phases, c'est-à-dire pour le composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$) et pour le matériau poreux ($c = 10^{-4}$). De plus, la taille de VER du matériau poreux est toujours supérieure à celle du composite renforcé. Enfin, une augmentation de la fraction volumique des inclusions produit une augmentation de la taille du VER quand on passe de 15 à 30%. Cette augmentation est plus accentuée dans le cas d'un biphasé représentant des inclusions plus souples ($c < 1$). Afin d'expliquer ces observations, nous renvoyons à l'argumentation présentée dans la section 3.3.1 lorsque nous avons étudié l'influence de la fraction volumique des inclusions sur les comportements apparents et leurs fluctuations.

4.3 VER de type milieu équivalent

Dans cette section, nous adoptons le deuxième point de vue présenté en 4.1 qui définit le VER comme étant le plus petit VE pour lequel le matériau hétérogène peut être remplacé dans un calcul de structures donné par un milieu homogène auquel on attribue les propriétés effectives. Ce point de vue nécessite d'utiliser des VER pour lesquels les fluctuations indivi-

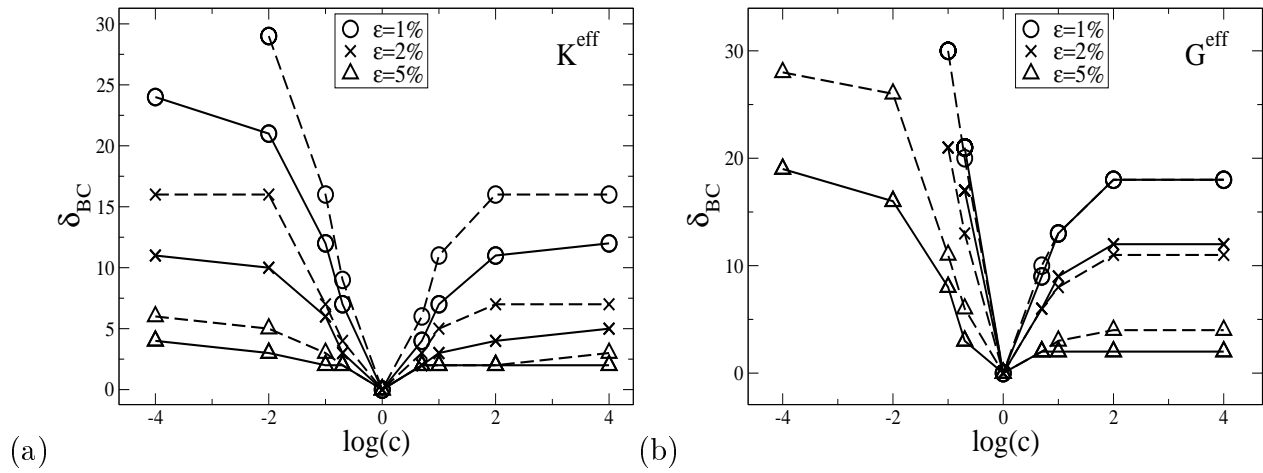


FIGURE 4.2 – Evolution des tailles de VER δ_{BC} associées au module de compressibilité plan (a) et au module de cisaillement (b) en fonction du contraste c pour différentes précisions ε et fractions volumiques d'inclusions f^I . La fraction volumique $f^I = 15\%$ est représentée par des lignes continues et la fraction $f^I = 30\%$ est représentée par des lignes discontinues.

duelles des comportements apparents soient faibles. Ces dernières peuvent être caractérisées en première approximation par les $CoV(Z_\delta^{d,t})$ et de façon exhaustive par les $pdf(Z_\delta^{d,t})$. Nous allons considérer dans ce qui suit 2 critères différents satisfaisant ce second point de vue. Dans le premier critère qui est aussi le plus simple, seules les fluctuations individuelles des comportements apparents associés à des CLDA et à des CLCH sont prises en compte. Le second critère intègre non seulement les fluctuations individuelles mais aussi celles liées aux CL.

4.3.1 Critère de VER basé sur le coefficient de variation

Le critère que nous nous proposons d'utiliser a déjà été utilisé dans la littérature (au moins dans les travaux de [3]) mais en se basant sur une autre procédure numérique que celle adoptée dans ce mémoire pour calculer le comportement apparent. Le principe consiste à déterminer une taille minimale de VER pour laquelle le CoV d'une propriété donnée $Z_\delta^{d,t}(\omega)$ est inférieur à une précision donnée ε à savoir

$$\delta_{CoV}^{d,t}(Z) = \text{Min}_\delta \left\{ \delta, CoV(Z_\delta^{d,t}) = \sigma(Z_\delta^{d,t}) / E(Z_\delta^{d,t}) < \varepsilon \right\} \quad (4.4)$$

Afin de définir à partir de $\delta_{CoV}^{d,t}(Z)$ un critère de VER qui ne dépend pas des CL, nous considérons le maximum des deux valeurs obtenues pour les deux CL c'est-à-dire $\delta_{CoV}(Z) =$

$\max \{ \delta_{CoV}^d(Z), \delta_{CoV}^t(Z) \}$. On remarquera que $\delta_{CoV}(Z)$ dépend principalement de l'évolution en fonction de δ de l'écart-type $\sigma(Z_\delta)$ même si la définition des CoV prend en compte à la fois les moments d'ordre 1 ($E(Z_\delta)$) et 2 ($\sigma(Z_\delta)$) de la propriété Z_δ . En effet, lorsque δ augmente, $E(Z_\delta)$ tend vers la propriété effective qui n'est pas nulle. Par conséquent l'influence du moment d'ordre un sur le CoV et donc l'influence des fluctuations des CL décrites par ces moments d'ordre 1 sont négligeables en comparaison avec celle du moment d'ordre deux qui tend vers 0 en fonction de δ . Nous déduisons ainsi que ce deuxième critère peut s'interpréter en tant que taille minimale de VE associé à des faibles fluctuations individuelles du comportement apparent, les fluctuations liées aux CL n'étant quasiment pas prises en compte par ce critère. On remarquera de plus que les fluctuations individuelles des propriétés apparentes sont décrites partiellement à travers ce critère puisque seul l'écart-type a été considéré et non la statistique complète du comportement apparent. Par ailleurs, on peut constater qu'il s'agit d'un critère simple à mettre en œuvre présentant une signification physique et statistique pertinente.

Nous avons reporté sur la figure 4.3 les évolutions de $CoV(Z_\delta^t)$ en fonction de δ pour 8 contrastes différents et 2 fractions volumiques ($f^I = 15\%, f^I = 30\%$). L'évolution de ces courbes sous une échelle log-log a déjà été commentée dans la partie 3.3 pour les contrastes $c = 10^4, 10^{-4}, 5, 1/5$. Elles sont reportées dans ce chapitre pour tous les contrastes uniquement en vue d'illustrer le calcul des tailles de VER $\delta_{CoV}(Z)$. Nous avons par ailleurs reporté uniquement les CoV liés à des CLCH car dans la plupart des cas ils sont supérieurs à ceux liés à des CLDA.

La figure 4.4 présente l'évolution en fonction du contraste c de la taille de VER δ_{CoV} associée au module de compressibilité plan (figure 4.4a) ou au module de cisaillement (figure 4.4b) calculée pour différentes précisions ($\varepsilon = 2\%, 5\%$) et deux fractions volumiques d'inclusions ($f^I = 15\%, 30\%$). Les mêmes tendances que celles obtenues dans le cas de la taille δ_{BC} du critère précédent fondé sur l'indépendance des CL sont observées. On remarque cependant que la taille du VER δ_{CoV} est moins sensible aux variations de la fraction volumique d'inclusions que ne l'était la taille de VER δ_{BC} , avec de plus une légère diminution de la taille lorsque l'on passe de 15% à 30%. Enfin, comme on s'y attendait (voir section 4.1), on remarque globalement que ce deuxième critère fournit des tailles de VER δ_{CoV} supérieures à celles obtenues par le premier critère montrant ainsi que le critère basé sur le CoV est plus exigeant que celui portant sur l'indépendance des CL.

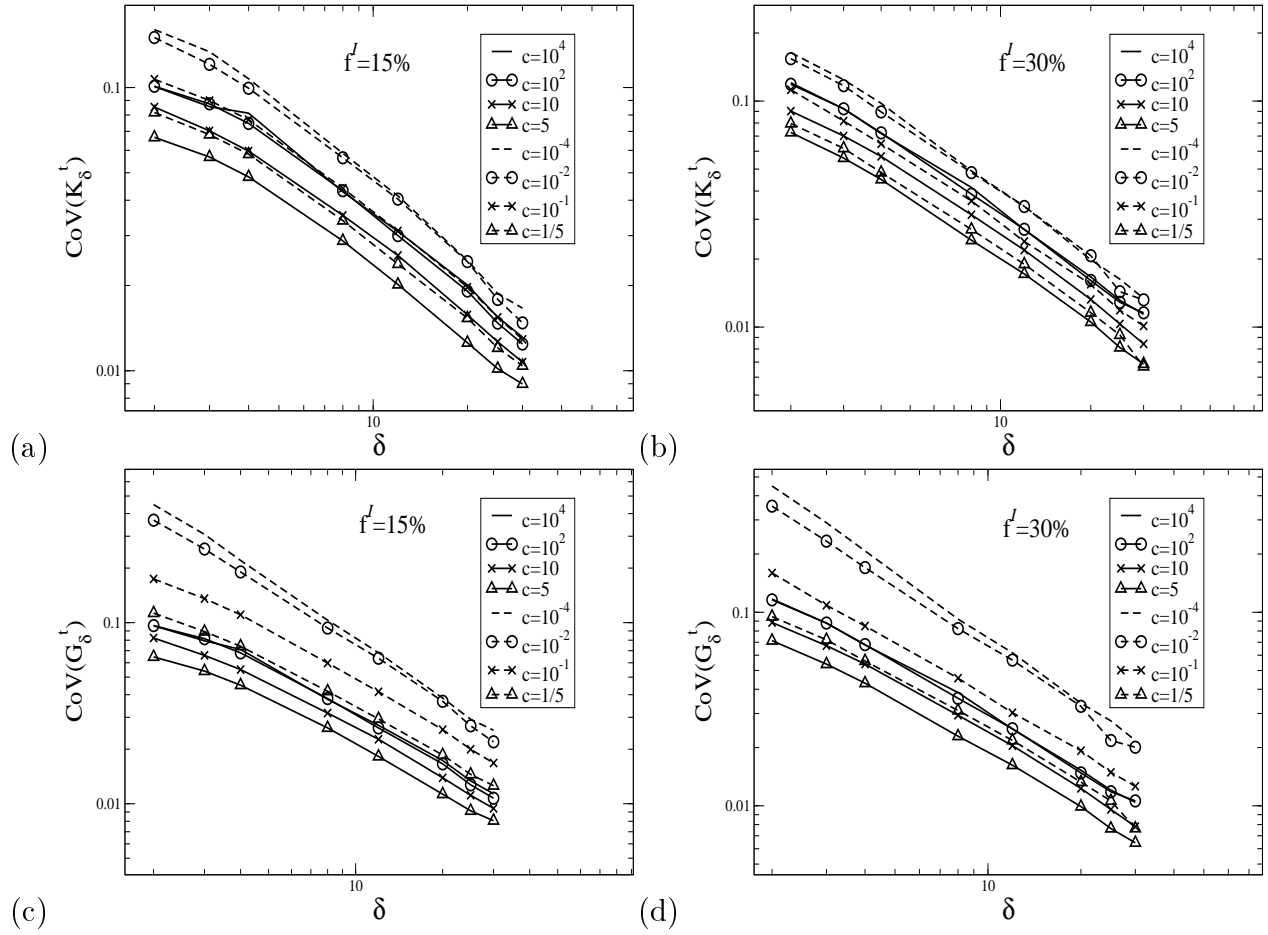


FIGURE 4.3 – Evolution de $CoV(Z_\delta^t)$ en fonction de δ pour différents contrastes. Cas du module de compressibilité plan pour une fraction volumique $f^I = 15\%$ (a) et $f^I = 30\%$ (b), et cas du module de cisaillement pour une fraction volumique $f^I = 15\%$ (c) et $f^I = 30\%$ (d).

4.3.2 Critère de VER basé sur toutes les sources de fluctuations

Afin de construire un nouveau critère de VER qui prendra en compte tous les types de fluctuations, c'est-à-dire aussi bien les fluctuations individuelles comme c'est le cas du second critère mais aussi celles liées aux CL, nous allons recourir aux résultats établis par Hazanov et Huet [26] concernant les comportements apparents. Ces auteurs ont montré que le tenseur des modules apparents $C_\delta^{app}(\omega)$ d'un VE $B_\delta(\omega)$ soumis à des CL quelconques mais qui satisfont la condition de macrohomogénéité de Hill, est encadré par les tenseurs des modules apparent $C_\delta^d(\omega)$ et $\hat{C}_\delta^t(\omega) = (S_\delta^t(\omega))^{-1}$ associés au même VE mais soumis respectivement à des CLDA

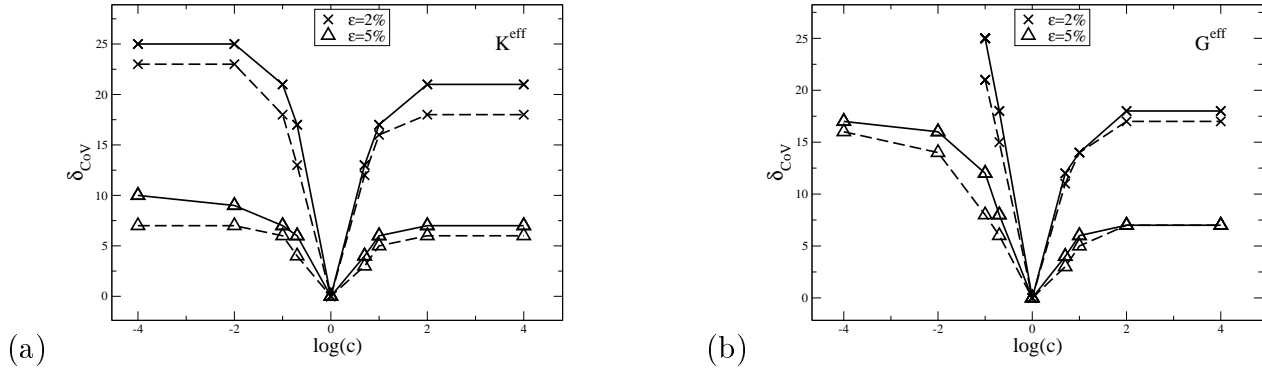


FIGURE 4.4 – Evolution des tailles de VER δ_{CoV} associées au module de compressibilité plan (a) et au module de cisaillement (b) en fonction du contraste c pour différentes précisions ϵ et fractions volumiques d'inclusions f^I . La fraction volumique $f^I = 15\%$ est représentée par des lignes continues alors que la fraction $f^I = 30\%$ est représentée par des lignes discontinues.

et des CLCH :

$$\hat{C}_\delta^t(\omega) = (S_\delta^t(\omega))^{-1} \leq C_\delta^{app}(\omega) \leq C_\delta^d(\omega). \quad (4.5)$$

La projection de la relation d'ordre (4.5) sur J_T et K_T conduit à

$$\begin{aligned} & \hat{Z}_\delta^t(\omega) \leq Z_\delta^{app}(\omega) \leq Z_\delta^d(\omega) \\ \text{avec } \begin{cases} Z_\delta^{app}(\omega) = \frac{1}{2}J_T : C_\delta^{app}(\omega), \hat{Z}_\delta^t(\omega) = \frac{1}{2}J_T : \hat{C}_\delta^t(\omega) & \text{pour } Z = K, \\ Z_\delta^{app}(\omega) = \frac{1}{4}K_T : C_\delta^{app}(\omega), \hat{Z}_\delta^t(\omega) = \frac{1}{4}K_T : \hat{C}_\delta^t(\omega) & \text{pour } Z = G. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les modules $Z_\delta^d(\omega)$ (pour $Z = K$ ou G) qui interviennent dans l'équation (4.6) ont déjà été préalablement définis par l'équation (3.2). A partir de l'inégalité (4.6), les fluctuations individuelles du module plan apparent $Z_\delta^{app}(\omega)$ peuvent ainsi être encadrées en se fondant sur les fonctions de distribution de ses bornes inférieures $\hat{Z}_\delta^t(\omega)$ et supérieure $Z_\delta^d(\omega)$ qui convergent toutes les deux vers la même distribution de Dirac centrée en Z^{eff} quand δ tend vers l'infini. En se fondant sur cette remarque, nous pouvons obtenir un troisième critère de VER qui garantit de faibles fluctuations individuelles des modules apparents. Pour cela, nous allons recourir à deux valeurs $Z_a(\delta, \alpha)$ et $Z_b(\delta, \alpha)$, dépendant d'une probabilité α et de la taille δ du VE, définies par

$$P(\hat{Z}_\delta^t(\omega) \geq Z_a(\delta, \alpha)) = 1 - \alpha/2, \quad P(Z_\delta^d(\omega) \leq Z_b(\delta, \alpha)) = 1 - \alpha/2. \quad (4.7)$$

Une illustration graphique de ces deux valeurs est fournie par la figure 4.5 dans le cas du module de compressibilité plan ($Z = K$). A partir des quantités $Z_a(\delta, \alpha)$ et $Z_b(\delta, \alpha)$, nous

pouvons définir un VER de type fluctuations individuelles dont la taille $\delta_{IF}(Z)$, pour une précision requise ε serait déterminée par

$$\delta_{IF}(Z) = \min_{\delta} \left\{ \delta, \frac{Z_b(\delta, \alpha) - Z_a(\delta, \alpha)}{Z_b(\delta, \alpha) + Z_a(\delta, \alpha)} \leq \varepsilon \right\}. \quad (4.8)$$

Ce critère peut s'interpréter statistiquement de la façon suivante. L'équation (4.8) garantit que si $\delta > \delta_{IF}(Z)$, au moins une proportion $(1 - \alpha)$ des valeurs de $Z_{\delta}^{app}(\omega)$ vérifie

$$\left| Z_{\delta}^{app}(\omega) - \frac{Z_a(\delta, \alpha) + Z_b(\delta, \alpha)}{2} \right| \leq \varepsilon \frac{Z_a(\delta, \alpha) + Z_b(\delta, \alpha)}{2}. \quad (4.9)$$

Ainsi¹, une proportion d'au moins $(1 - \alpha)$ des modules apparents $Z_{\delta}^{app}(\omega)$ ne s'écarte que peu de la valeur $\frac{Z_a(\delta, \alpha) + Z_b(\delta, \alpha)}{2}$. Remarquons que l'influence des fluctuations liées aux CL est prise en compte dans la définition du critère (4.8) qui repose sur l'écart $Z_b(\delta, \alpha) - Z_a(\delta, \alpha)$ issu de la différence entre des CLDA et des CLCH. Afin de mieux visualiser ce critère, nous avons reporté sur la figure 4.6 l'évolution de la quantité $\frac{Z_b(\delta, \alpha) - Z_a(\delta, \alpha)}{Z_b(\delta, \alpha) + Z_a(\delta, \alpha)}$ en fonction de δ pour plusieurs contrastes et deux probabilités $\alpha = 5\%$ et $\alpha = 10\%$. Comme attendu, cette quantité décroît vers 0 quand δ augmente.

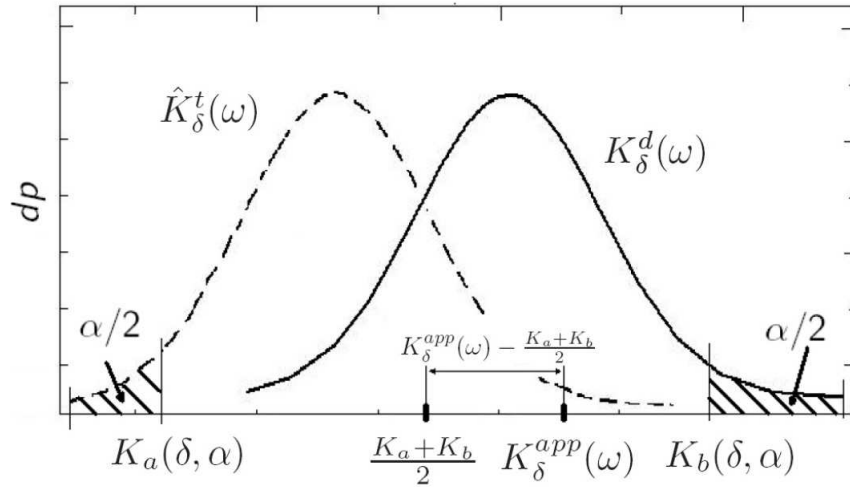


FIGURE 4.5 – Interprétation graphique du critère de VER $\delta_{IF}(K)$

La figure 4.7 (respectivement la figure 4.8) fournit l'évolution des tailles de VER δ_{IF} associées d'une part au module de compressibilité plan et d'autre part au module de cisaillement en fonction du contraste c pour différentes précisions ε et probabilités α et pour une

1. On adopte l'hypothèse simplificatrice de l'indépendance statistique des probabilités $P(\hat{Z}_{\delta}^t \geq Z_a)$ et $P(Z_{\delta}^d \leq Z_b)$ et on considère α petit.

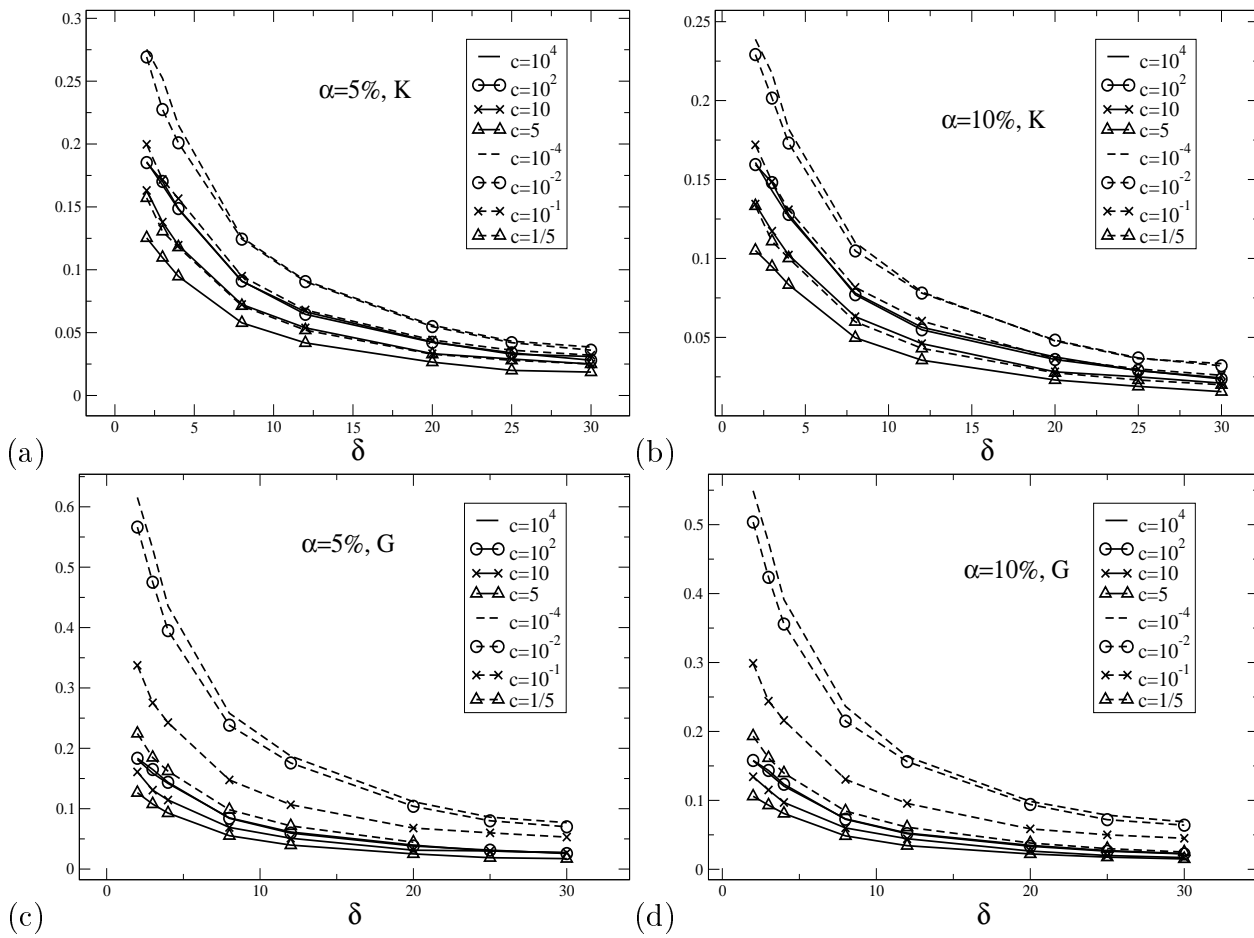


FIGURE 4.6 – Evolution de la quantité $\frac{Z_b(\delta, \alpha) - Z_a(\delta, \alpha)}{Z_b(\delta, \alpha) + Z_a(\delta, \alpha)}$ en fonction de δ pour différents contrastes ($f^I = 15\%$). Cas du module de compressibilité plan ($Z = K$) pour $\alpha = 5\%$ (a) et $\alpha = 10\%$ (b). Cas du module de cisaillement ($Z = G$) pour $\alpha = 5\%$ (c) et $\alpha = 10\%$ (d).

fraction volumique de 15% (respectivement $f^I = 30\%$). La plus petite valeur de précision, $\varepsilon = 5\%$, a été choisie afin de pouvoir obtenir des tailles de VER inférieures à $\delta = 30$. Comme on peut le constater sur les figures 4.7 et 4.8, la valeur $\delta_{IF} = 30$ pour $\varepsilon = 5\%$ est très vite dépassée pour le module de cisaillement du matériau (quasi-)poreux ($c = 10^{-2}$, $c = 10^{-4}$) et est atteinte pour $\varepsilon = 5\%$ avec $c = 10^{-4}$. Comme le montrent ces figures, nous retrouvons les mêmes tendances que celles observées dans le cas des deux derniers critères de VER δ_{BC} et δ_{CoV} (voir la section 4.2). Cependant, quand on compare les valeurs des tailles de VER δ_{IF} à celles obtenues précédemment pour δ_{BC} et δ_{CoV} pour le même seuil de convergence ($\varepsilon = 5\%$), les mêmes contrastes et les mêmes fractions volumiques des inclusions, on constate que le critère du VER appliqué dans cette section fournit des tailles de VER largement supérieures à celles des critères précédents. Cela montre, comme on pouvait s'y attendre, que le critère

δ_{IF} est le plus exigeant des critères que nous avons définis jusqu'ici. On remarque de plus que les courbes présentant l'évolution de δ_{IF} en fonction du contraste à une fraction volumique donnée sont approximativement d'un ordre de grandeur égal à deux fois les courbes de δ_{CoV} pour la même précision $\varepsilon = 5\%$ considérée.

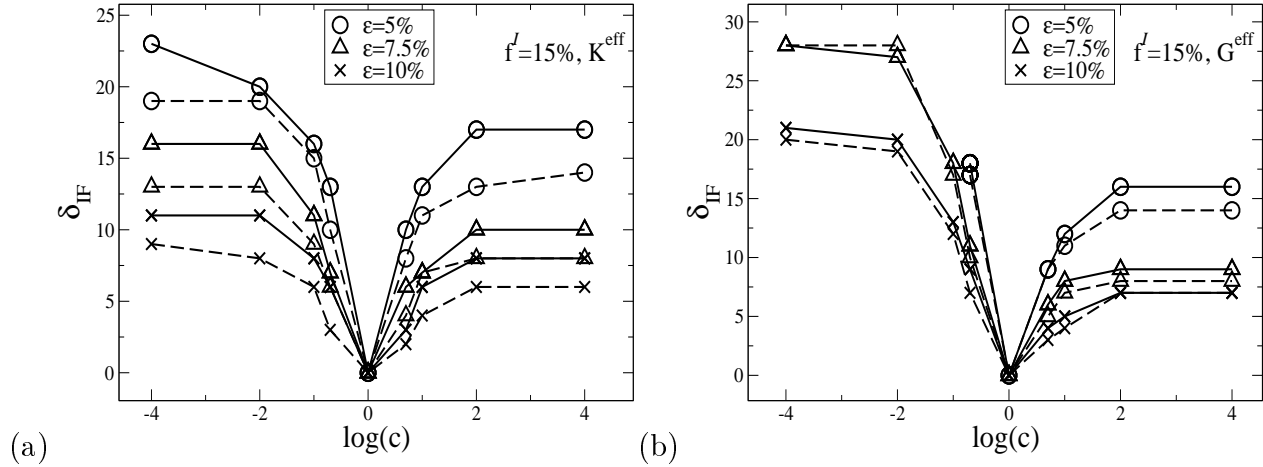


FIGURE 4.7 – Evolutions des tailles de VER δ_{IF} associées au module de compressibilité plan (a) et au module de cisaillement (b) en fonction du contraste c pour différentes précisions ε et probabilités α . Les probabilités $\alpha = 5\%$ et $\alpha = 10\%$ sont représentées respectivement par des lignes continues et par des lignes discontinues. $f^I = 15\%$.

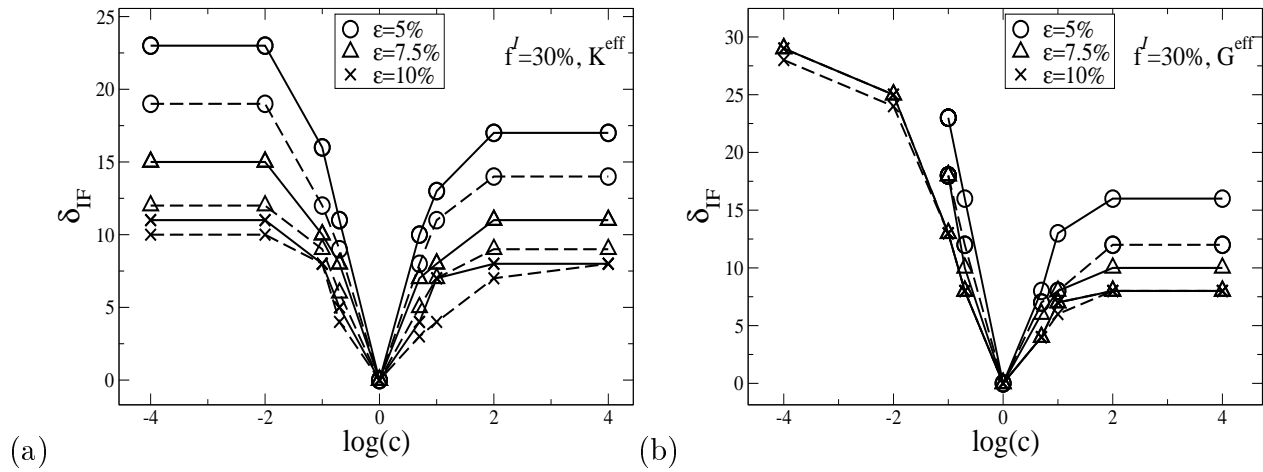


FIGURE 4.8 – Evolution des tailles de VER δ_{IF} associées au module de compressibilité plan (a) et au module de cisaillement (b) en fonction du contraste c pour différentes précisions ε et probabilités α . La probabilité $\alpha = 5\%$ et $\alpha = 10\%$ sont représentées respectivement par des lignes continues et par des lignes discontinues. $f^I = 30\%$.

4.4 Comparaison des divers critères de tailles de VER et discussion

Nous présentons dans cette partie deux tableaux récapitulatifs des tailles de VER que nous avons obtenues tout au long de ce chapitre. Les résultats exposés dans ces tableaux concernent uniquement les composites à contraste infini c'est-à-dire le composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$) et le matériau poreux ($c = 10^{-4}$) pour des fractions volumiques valant $f^I = 15\%$ et $f^I = 30\%$. Les tailles de VER qui sont reportées sur les tableaux 4.1 et 4.2 correspondent aux modules de compressibilité plan et de cisaillement des matériaux considérés. A titre de comparaison, nous avons aussi mentionné les tailles de VER obtenues dans les travaux de Drugan et Willis (δ_{DW}) [15]. Pour rappel, ces dernières ont été obtenues pour un composite élastique linéaire de type matrice-inclusions sphériques. Le choix de prendre en compte uniquement dans les comparaisons le critère de Drugan et Willis vient simplement du fait que les composites considérés dans leur étude ont des caractéristiques mécaniques et fractions volumiques similaires aux composites sur lesquels nous avons réalisé nos applications numériques. En effet, il s'agit de matériaux poreux et de composites renforcés par des particules rigides dont la matrice a un coefficient de poisson de 0.2 (celui considéré dans nos applications numériques valant $\nu^M = 0.125$ du fait que $k^M = \mu^M$) et dont la fraction volumique d'inclusion s'étale de $f^I = 2.5\%$ à $f^I = 40\%$. On se rappellera cependant qu'au sein de toutes les tailles de VER obtenues dans la littérature pour les différents types de matériaux testés, celles obtenues par Drugan et Willis font partie des plus faibles. Comme cela a été souligné dans la partie introductive 4.1, les tableaux 4.1 et 4.2 montrent

Taille de VER minimale	δ_{BC}		δ_{CoV}		δ_{IF}		δ_{DW}	
Fraction volumique f^I	15%		15%		15%		15%	
Niveau de probabilité α	1%		-		5%		-	
Précision ε	1%	5%	2%	5%	5%	10%	1%	5%
<u>Composite renforcé</u>	-		-		-		-	
Module de compressibilité plan	12	2	21	7	17	8	-	
Module de cisaillement	18	2	18	7	16	7	≤ 4.5	1.033
Module C_{1111}	-		-		-		≤ 4.5	1.887
<u>Matériau poreux</u>	-		-		-		-	
Module de compressibilité plan	24	4	25	10	23	11	-	
Module de cisaillement	> 30	19	> 30	17	> 30	21	≤ 4.5	1.033
Module C_{1111}	-		-		-		≤ 4.5	1.887

TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif des tailles des VER, $f^I = 15\%$

clairement que la taille de VER dépend des points de vue et des définitions de VER considé-

rées. En effet, on observe des écarts importants entre les valeurs obtenues par les différents critères qui traduisent deux points de vue différents. Comme nous l'avons constaté dans la partie précédente, pour une même précision $\varepsilon = 5\%$, le critère 1 basé uniquement sur les fluctuations liées aux CL fournit les tailles de VER les plus petites alors que le critère 3 basé à la fois sur les fluctuations individuelles de la microstructure et des fluctuations liées aux CL fournit les tailles de VER les plus grandes. Le critère 2 basé principalement sur les fluctuations individuelles fournit des tailles de VER intermédiaires. L'origine physique des différents ordres de grandeur de ces 3 types de VER est donc bien établie. Prendre uniquement en compte dans la définition du VER les fluctuations liées aux CL ou celles liées à la microstructure conduit respectivement aux tailles de VER les plus petites ou intermédiaires montrant ainsi que, pour le type de composite considéré dans cette étude, les fluctuations individuelles de la microstructure ont une plus grande « portée » que celles liées aux CL. Enfin quand on prend en compte la totalité des fluctuations dans la définition du VER (c'est-à-dire les fluctuations individuelles et liées aux CL), on obtient les tailles de VER les plus importantes. Par ailleurs, conformément aux résultats des chapitres 1 et 3, les tableaux 4.1 et 4.2 montrent que la taille du VER du matériau poreux est plus grande que celle du composite renforcé. Cette remarque est valable pour les 3 critères que nous avons considérés. De plus, on constate que les tailles de VER du module de cisaillement du matériau poreux sont nettement plus grandes que celles liées au module de compressibilité plan contrairement au composite renforcé par des particules rigides où les tailles de VER associées au module de compressibilité plan et au module de cisaillement sont du même ordre de grandeur. Cette tendance est encore corroborée par chacun des 3 critères mettant ainsi indirectement en évidence la cohérence physique et statistique de leurs définitions. On remarque enfin que le critère 1 lié à l'indépendance vis-à-vis des CL, bien que fournissant les plus petites tailles de VER, conduit à des tailles de VER bien supérieures à celles obtenues par Drugan et Willis.

4.5 Conclusions

En se basant sur les résultats exposés dans les chapitres 1 et 3 portant respectivement sur l'étude des comportements apparents et effectif, nous avons proposé différents critères de VER. Pour cela, nous avons adopté deux points de vue différents aboutissant à deux notions de VER différentes : le VER de calcul des propriétés effectives et le VER de remplacement d'un matériau hétérogène par un matériau homogène équivalent au sein d'un calcul

Taille de VER minimale	δ_{BC}	δ_{CoV}	δ_{IF}	δ_{DW}
Fraction volumique f^I	30%	30%	30%	30%
Niveau de probabilité α	1%	-	5%	-
Précision ε	1% 5%	2% 5%	5% 10%	1% 5%
<u>Composite renforcé</u>	-	-	-	-
Module de compressibilité plan	16 3	18 6	17 8	-
Module de cisaillement	18 4	17 7	8 8	≤ 4.5 1.078
Module C_{1111}	-	-	-	≤ 4.5 1.968
<u>Matériau poreux</u>	-	-	-	-
Module de compressibilité plan	> 30 6	23 7	23 11	-
Module de cisaillement	> 30 28	> 30 16	29 29	≤ 4.5 1.078
Module C_{1111}	-	-	-	≤ 4.5 1.968

TABLE 4.2 – Tableau récapitulatif des tailles des VER, $f^I = 30\%$

de structures. A partir de ces 2 types de VER, nous avons présenté 3 critères de VER et avons reporté les différents résultats obtenus pour les divers contrastes dans les tableaux 4.1 et 4.2.

Cette étude nous amène à conclure que la notion de VER est une notion délicate qui dépend du point de vue considéré, à savoir principalement de l'utilisation que l'on souhaite en faire, et du niveau de précision souhaité. Par ailleurs, nous retrouvons bien entendu les conclusions exposées par Kanit et al [33] à savoir qu'il n'y a pas une taille unique de VER mais que celle-ci dépend du matériau considéré (morphologie, fraction volumique, paramètres matériaux dont le contraste) de la propriété mécanique ou physique considérée et par dessus tout de la précision souhaitée.

Conclusions et perspectives

Il existe dans la littérature un grand nombre d’approches consacrées à la détermination du comportement effectif de matériaux hétérogènes de type matrice-inclusions à comportement linéaire élastique. S’inscrivant dans cette thématique, le travail qui a été réalisé peut se résumer en deux points principaux : le premier concerne la présentation d’une nouvelle approche permettant d’obtenir des encadrements resserrés des propriétés effectives pour différentes configurations (contraste et fraction volumique d’inclusions) des composites considérés. Le deuxième point consiste à élaborer et mettre en œuvre différents critères de taille de VER en se basant sur la statistique des comportements apparents calculés à partir de cette nouvelle approche. Nous présentons dans cette conclusion générale un rappel de la méthodologie que nous avons adoptée dans ce mémoire ainsi que les principaux résultats obtenus. Nous proposons ensuite diverses perspectives.

Démarche générale

Dans le but de fournir un encadrement amélioré du comportement effectif des matériaux hétérogènes de type matrice-inclusions à comportement élastique linéaire à partir d’une moyenne appropriée des propriétés apparentes de VE de taille finie, nous avons développé une approche basée sur une décomposition de la microstructure en cellules de Voronoï, qui permet de construire des VE de calcul non carrés, tels que les CL ne s’appliquent jamais directement sur les inclusions du matériau considéré. Nous avons appliqué cette approche à des composites de type fibres matrice à contraste soit infini, à savoir les composites renforcés par des fibres rigides et les matériaux poreux, soit à contraste fini (biphasés pour lesquels $c \in [10^{-2}, 10^2]$). Dans les applications numériques, nous avons aussi considéré deux fractions volumiques d’inclusions différentes ($f^I = 15\%$ et 30%). Afin de comparer les résultats obtenus par cette nouvelle méthode à ceux issus de l’approche « classique » de Huet qui

utilise des VE carrés, autorisant ainsi une application directe des CL sur les inclusions, nous avons aussi calculé les bornes du comportement effectif des matériaux évoqués précédemment en utilisant de tels VE de calcul de forme carrée. Les deux approches évoquées étant des approches relativement coûteuses en temps et volumes de calcul, nous avons proposé une troisième approche beaucoup moins lourde à mettre en œuvre. Cette dernière consiste en un modèle semi-analytique issu de l'approche par MMR et de la décomposition en cellules de Voronoï de la microstructure. Contrairement aux deux premières méthodes, cette troisième approche n'utilise pas de calculs par éléments finis, allégeant ainsi considérablement les coûts numériques.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude de la statistique des comportements apparents calculés à l'aide de la nouvelle approche présentée dans la première partie basée sur des VE non-carrés. Pour cela, nous avons étudié l'influence des fluctuations liées aux CL en traçant l'évolution en fonction de la taille δ du VE de calcul de l'écart entre les bornes du comportement effectif tout en prenant en compte l'erreur relative à l'estimation de l'espérance issue d'un nombre fini n de réalisations. Nous avons également analysé l'évolution des fluctuations totales du comportement apparent, ces dernières étant constituées des fluctuations liées aux CL et des fluctuations « individuelles » de la microstructure, induites par la variabilité statistique de la géométrie du VE. Pour cela, nous avons étudié l'évolution du CoV des modules apparents de compressibilité plan et de cisaillement en fonction de δ pour différentes configurations de matériaux considérés. Pour obtenir une vision complète de la statistique des modules apparents de compressibilité plan et de cisaillement, nous avons également étudié l'évolution de leurs densités de probabilité vis-à-vis de la taille du VE. Enfin, nous nous sommes intéressés aux écarts à l'isotropie des réalisations du comportement apparent en le quantifiant à l'aide des mesures $\Delta_{iso}^{d,t}$ et en étudiant leurs évolutions en fonction de δ .

A l'issu de cette étude statistique du comportement apparent, nous avons défini des critères de taille de VER en adoptant deux points de vue que nous avons confrontés à ceux déjà existant dans la littérature. Le premier point de vue que nous avons considéré vise à calculer une taille de VE minimale permettant de calculer les propriétés effectives pour une précision donnée. A cette intention, nous avons construit un critère de VER de calcul 4.3 fondé sur l'indépendance des bornes du comportement effectif vis-à-vis des CL. Le deuxième point de vue considéré consiste à déterminer une taille minimale de VE au delà de laquelle il est raisonnable de remplacer dans un calcul de structures le matériau hétérogène réel par un

matériau homogène équivalent auquel on affecte les propriétés effectives du matériau hétérogène. Ce deuxième point de vue implique que les fluctuations du comportement apparent doivent être faibles (selon un sens statistique à définir) quand le VER est atteint. Nous avons alors proposé deux critères satisfaisant ce point de vue. Le premier considère que le VER est atteint quand le CoV est inférieur à une valeur seuil ε . Ce critère est principalement fondé sur la prise en compte des fluctuations individuelles de la microstructure, ces dernières étant prépondérantes par rapport aux fluctuations liées aux CL (voir section 3.3). Le deuxième critère satisfaisant ce second point de vue repose sur les densités de probabilité des modules apparents issus de CLDA et de CLCH et prend en compte tous les types de fluctuations, aussi bien celles liées aux CL que les fluctuations individuelles de la microstructure.

Principaux résultats

Le résultat principal du travail présenté dans cette thèse consiste en une amélioration significative des bornes du comportement effectif de matériaux composites de type matrice-inclusions à comportement élastique linéaire notamment dans le cas des forts contrastes pour lesquels l'approche de type Huet ne conduit pas à des résultats satisfaisants. La nouvelle approche présentée dans ce mémoire, appliquée numériquement pour déterminer le comportement transverse de composites renforcés ou assouplis par des fibres longues de même direction et distribués de façon isotrope, évite la divergence des bornes observées pour des VE carrées dans les cas de forts contrastes tout en fournissant des bornes rigoureuses qui présentent un écart relativement faible même pour des petites tailles de fenêtres de calcul δ . En effet, la surévaluation artificielle des modules apparents (à l'origine de la divergence des bornes) induite principalement dans l'approche de type Huet par l'application directe des CL sur les particules rigides et sur les pores a quasiment disparu quand on utilise l'approche de type Voronoï. Cette surévaluation disparaît aussi dans l'approche de type Huet quand on applique des CL périodiques. Néanmoins, cette dernière approche fournit uniquement des estimations pertinentes du comportement effectif et non des bornes resserrées comme l'approche présentée ici. L'amélioration apportée par cette dernière, très significative pour les forts contrastes (jusqu'à 7000%), est aussi présente dans le cas des matériaux biphasés présentant un faible contraste entre les phases, même si elle est beaucoup moins importante (de l'ordre de 5% pour $c = 5$) que celle observée dans le cas des forts contrastes.

Nous avons ensuite testé numériquement, sur le même type de composite que celui consi-

déré dans les approches de type VOR et Huet, le modèle semi-analytique présenté dans la partie 3 fondé sur l'approche par MMR de type Voigt et Reuss et sur la discrétisation de la microstructure en cellules de Voronoï. Cette deuxième modélisation nous a permis de réduire très significativement les temps de calcul en comparaison avec les approches en champs complets de type VOR ou Huet qui recourent à la méthode des EF. En effet, l'approche de type Voronoï requiert jusqu'à une semaine de temps de calcul afin de fournir les résultats de toutes les réalisations pour les 8 tailles de fenêtres de calcul δ considérées pour un contraste et une fraction volumique donnés alors que l'approche semi-analytique ne prend qu'environ une heure afin de réaliser les calculs nécessaires. Nous avons comparé les résultats issus des approches de type VOR, SC, MMR et de quelques modèles classiques telles que les bornes HS. Nous avons remarqué que la qualité des résultats concernant l'approche de type MMR dépend du type de matériau considéré. Dans le cas du composite renforcé par des fibres rigides ($c = 10^4$, $f^I = 15\%$), nous avons constaté que l'amélioration principale réside dans le fait que l'approche semi-analytique fournit une borne supérieure de type Voigt MMR assez resserrée, de l'ordre de 1.05 à 1.15 fois le comportement effectif. La borne de type Reuss MMR est cependant moins performante que la borne HS-. Dans le cas du matériau poreux ($c = 10^{-4}$, $f^I = 15\%$), les résultats constatés ne sont pas satisfaisants. Le seul apport de l'approche par MMR pour le matériau poreux est de fournir une borne inférieure non nulle (de l'ordre de 40 à 50% du comportement effectif) contrairement à la borne inférieure de type Huet ou HS-. Pour les matériaux biphasés, les résultats obtenus pour $c = 5$ et $f^I = 15\%$ sont plus intéressants. En effet, la borne supérieure de type Voigt MMR est plus resserrée que la borne HS+ même si l'inverse est observé pour les bornes inférieures Reuss MMR et HS-. Au final, il semble donc que l'approche semi-analytique proposée fournisse un outil intéressant permettant d'obtenir une borne supérieure resserrée du comportement effectif dans le cas des composites renforcés ($c > 1$), à un coût numérique minime.

Les résultats obtenus par l'étude statistique des modules apparents issus de l'approche de type Voronoï ont montré que les fluctuations du comportement apparent convergeaient de façon relativement rapide vers 0 quand δ augmente. Par exemple à $\delta = 30$, les CoV sont inférieurs à 2.5% quel que soit le contraste considéré. Comme on pouvait s'y attendre, on remarque que l'évolution des fluctuations dépend de plusieurs paramètres tels que le type du matériau considéré (valeurs de c et de f^I) ainsi que la propriété étudiée. Par ailleurs, en étudiant l'évolution du CoV des modules apparents issus des deux types de CL imposées, nous constatons que l'écart entre les CoV calculés pour des CLDA et pour des CLCH tend plus rapidement vers 0 que les CoV eux mêmes. Ce résultat intéressant montre que l'influence des

CL sur la fluctuation des modules a une portée moins grande que l'influence des fluctuations individuelles de la microstructure. Nous avons de plus remarqué que l'isotropie des réalisations individuelles des comportements apparents est vite atteinte dans le cas de l'approche de type Voronoï quelle que soit la configuration de matériau considérée à l'exception cependant du matériau poreux à $f^I = 30\%$ et pour des CLCH. Dans le cadre de l'étude des densités de probabilité des modules apparents, nous avons remarqué que celles-ci tendent rapidement (au plus tard pour $\delta = 12$) vers une distribution gaussienne quels que soient les contrastes et fractions volumiques considérés. En nous fondant sur cette observation, nous avons proposé une exploitation des densités de probabilité obtenues pour les situations où l'hypothèse de séparation d'échelles n'est pas bien satisfaite. En effet, nous proposons dans une telle situation de se baser sur les densités de probabilité des modules apparents si celles-ci convergent vers une distribution de loi connue à partir d'un VE de taille $\delta_{dp} < \delta_{VER}$ (une gaussienne dans le cas des composites renforcés par des fibres longues). Cette distribution connue des modules apparents, dont les paramètres statistiques (moyenne et écart-type par exemple) du ou des modules étudiés seront déterminés à $\delta = \delta_{dp}$ lors d'une étude des comportements apparents, sera utilisée pour résoudre le problème de calcul de structures par des approches stochastiques numériques telle que la méthode des éléments finis stochastiques. Bien sûr, pour que cela soit possible, il est nécessaire que la taille δ_{dp} , inférieure à celle du VER, soit aussi suffisamment faible vis-à-vis de la taille de la structure pour permettre un calcul de structure suffisamment discrétisé.

Suite à cette étude statistique de la variabilité, nous nous sommes basés sur ses résultats numériques pour définir des critères de VER et calculer leurs tailles δ_{VER} selon les deux points de vue que nous avons présentés. Comme on s'y attendait, du fait des points de vue et des effets différents pris en compte au sein de ces critères, nous avons abouti à des valeurs de δ_{VER} qui varient significativement d'un critère à l'autre, confirmant ainsi que la notion de VER dépend fortement de la définition et du point de vue considérés. Nous avons bien sûr retrouvé les conclusions des travaux de Kanit et al [33] montrant qu'il n'existe pas une taille unique de VER mais que celle-ci dépend du matériau considéré, de la propriété étudiée et avant tout de la précision exigée. En comparant les tailles de VER issues des différents critères que nous avons proposés, nous avons remarqué, d'une part, que les tailles de VER associées au calcul des propriétés effectives sont plus faibles que celles de VER de type milieu équivalent. D'autre part, les critères de VER de type milieu équivalent sont d'autant plus exigeants qu'ils prennent en compte l'influence de la totalité des fluctuations (celles liées aux CL et celles liée aux variabilités individuelles des microstructures) comme c'est le cas du

critère (4.8) plutôt que la seule influence des fluctuations individuelles comme c'est le cas du critère (4.4).

Perspectives

Dans cette partie, nous proposons quelques perspectives aux travaux réalisés. Tout d'abord, il serait intéressant d'appliquer l'approche à cellules carrées classiques en adoptant des CL périodiques sur les composites de type matrice renforcée par des fibres longues afin de pouvoir comparer l'estimation du comportement effectif ainsi obtenue avec les bornes issues de l'application de l'approche de type Voronoï. L'intérêt de tels calculs serait de comparer l'efficacité des bornes que nous avons présentées dans ce mémoire à celle reconnue de l'estimation des propriétés effectives issue de l'application de CL périodiques sur des VE carrés. Nous pourrions aussi réaliser de nouveaux calculs pour d'autres fractions volumiques d'inclusions afin de mieux mettre en évidence l'influence de la fraction volumique sur la variabilité des modules apparents et par conséquent sur la taille du VER. Par ailleurs, il serait également intéressant d'appliquer notre approche au cas de microstructures tridimensionnelles telles que celles des composites renforcés ou assouplis par des renforts sphériques. Comme application à des microstructures réelles, on pourrait ainsi simuler la microstructure d'un combustible nucléaire ou d'un pneu constitué d'une matrice élastomère renforcée par des particules de noir de carbone. Le principe de l'approche consistera à réaliser une partition de la microstructure en cellules de Voronoï 3D comportant pour chacune d'entre elle un seul renfort sphérique et à construire ensuite un VE de calcul non cubique par un assemblage de toutes les cellules de Voronoï dont le centre est compris dans un cube de taille δ . Afin de calculer les propriétés apparentes et effective du matériau considéré, il suffira d'appliquer la suite de la procédure telle qu'elle a été présentée au chapitre 1 mais cette fois-ci pour des comportements apparents 3D. Afin de tester les performances de cette approche dans le cas 3D, il serait souhaitable de comparer ces résultats avec ceux obtenus sur des VE cubiques sur lesquels on applique directement les CL. Nous proposons par ailleurs de tester cette nouvelle approche (en 2D ou 3D) sur d'autres types de distribution des inclusions qui désormais ne seraient plus uniformes mais présenteraient par exemple des amas d'inclusions. Nous pourrions éventuellement considérer des tailles d'inclusions variables plutôt que d'utiliser un unique diamètre. Dans une étape plus avancée, nous pourrions aussi utiliser d'autres formes géométriques de renfort. La seule condition à remplir pour pouvoir appliquer l'approche de

type Voronoï consiste à ce que les renforts restent non connectés afin de pouvoir discrétiser la microstructure en cellules de Voronoï généralisées constituées par une (éventuellement plusieurs) inclusion(s) entourée(s) de matrice.

Afin d'améliorer les résultats obtenus dans le cas de l'approche basée sur les MMR, nous pourrions aussi réaliser un nouveau modèle qui prendrait mieux en compte la distribution des inclusions dans le VE de calcul. A cette intention, chaque cylindre composite qui constitue les motifs de l'assemblage (en dehors du motif de matrice résiduelle) serait défini comme étant le plus grand cercle inscrit dans la cellule de Voronoï et contenant l'inclusion. Une telle définition implique qu'un cylindre composite n'aura pas forcément le même centre que celui de la cellule de Voronoï qui coïncide avec le centre de l'inclusion de sa cellule. Par conséquent, le centre de l'inclusion sera excentré dans le cylindre composite en fonction de la position de ce dernier dans la cellule de Voronoï. Comme il n'existe pas de modèle analytique pour la détermination du comportement apparent d'un tel cylindre composite, il est donc nécessaire de recourir à la MEF (ou à une autre méthode numérique) pour évaluer ce comportement. En revanche, ce calcul ne sera a priori pas coûteux car il est effectué sur des cellules très simples (un cylindre composite) même s'il faut le réaliser autant de fois qu'il y a de cylindre composites différents pour un VE donné. Mais de tels cylindres composites sont décrits par un nombre très limité de paramètres (fraction volumique, excentricité, orientation), si bien que toutes les configurations pourraient être explorées à moindre coût. Ces coûts de calcul seraient bien sûr à comparer à ceux nécessités par un seul calcul EF par VE mais réalisé sur l'ensemble de la microstructure du VE. Pour chaque cylindre composite (le motif), nous appliquerions des CLDA et des CLCH pour calculer le comportement apparent du VE en question et obtiendrions par l'approche par motifs des bornes de type Voigt et Reuss. Cette méthode aurait donc le potentiel de fournir de meilleurs résultats que l'autre approche MMR présentée dans le troisième chapitre pour laquelle les centres des motifs (les cylindres composites) et des inclusions coïncident. Elle présenterait en revanche un coût de calcul plus important que l'approche du chapitre 3 en raison de son recours à la MEF, mais elle serait a priori moins coûteuse que les approches d'homogénéisation en champs complets de type VOR ou Huet. Un tel travail est actuellement en cours.

Enfin, l'étude de l'évolution des comportements apparents en fonction de la taille du VE pourrait être étendue aux champs locaux à l'origine de ces comportements apparents. On pourrait notamment s'intéresser à l'évolution de leurs moments d'ordre 1 et 2, de leurs fluctuations et de leurs fonctions de distribution en fonction de la taille du VE. Une telle étude

aurait pour objectif par exemple de définir des critères de VER basés sur les champs locaux plutôt que sur les comportements apparents, de caractériser l'évolution des déformations de référence utilisée dans les modèles d'homogénéisation non linéaire en fonction de δ pour savoir à partir de quelle taille de VE il est pertinent d'utiliser les procédures de linéarisation de l'homogénéisation en champs moyens, d'évaluer différents critères locaux de rupture en fonction de la taille du VE considéré, etc. Cette étude est également en cours de réalisation.

Bibliographie

- [1] M.J. Beran. *Statistical Continuum Theories*. John Wiley, New York, 1968.
- [2] N. Bilger, F. Auslender, M. Bornert, H. Moulinec, and A. Zaoui. Bounds and estimates for the effective yield surface of porous media with a uniform or a nonuniform distribution of voids. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 26 :810–836, 2007.
- [3] V. Blanc. *Modélisation du comportement thermomécanique des combustibles à particules par une approche multi-échelle*. PhD thesis, Université de Provenances (France), 2011.
- [4] M. Bornert. Homogénéisation des milieux aléatoires : bornes et estimations. In M. Bornert, Th. Bretheau, and P. Gilormini, editors, *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*, pages 133–221. Hermès Science Publication, 2001.
- [5] M. Bornert, E. Hervé, C. Stolz, and A. Zaoui. Self-consistent approaches and strain heterogeneities in two-phase elastoplastic materials. *Applied Mechanics Reviews*, 47 :66–76, 1994.
- [6] M. Bornert, C. Stolz, and A. Zaoui. Morphologically representative pattern-based bounding in elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 44 :307–331, 1996.
- [7] R. Brenner, Masson R., O. Castelnau, and A. Zaoui. A quasi-elastic affine formulation for the homogenised behaviour of nonlinear viscoelastic polycrystals and composites. *Eur. J. Mech. Solids/A*, 21 :943–960, 2002.
- [8] G. Casella and R. Berger. *Statistical Inference*. Duxbury, United States, 2001.
- [9] CEA. Cast3m. <http://www-cast3m.cea.fr/>, 2003.
- [10] R. M. Christensen and K. H. Lo. Solution for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27 :315–330, 1979.
- [11] R.M. Christensen and K.H. Lo. Solution for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech.Phys. Solids*, 27 :315–330, 1979.

- [12] M. Danielsson, D. Parks, and M. Boyce. Micromechanics, macromechanics and constitutive modeling of the elasto-viscoplastic deformation of rubber-toughened glassy polymers. *J. Mech. Phys. Solids*, 55 :533–561, 2007.
- [13] I. Doghri, L. Adam, and N. Bilger. Mean-field homogenization of elasto-viscoplastic composites based on a general incrementally affine linearization method. *International Journal of Plasticity*, 26 :219–238, 2010.
- [14] I. Doghri, L. Brassart, L. Adam, and J.S. Gérard. A second-moment incremental formulation for the mean-field homogenization of elasto-plastic composites. *International Journal of Plasticity*, 27 :352–371, 2011.
- [15] W.J. Drugan and J.R. Willis. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 44 :497–524, 1996.
- [16] J. Escoda, F. Willot, D. Jeulin, J. Sanahuja, and C. Toulemonde. Estimation of local stresses and elastic properties of a mortar sample by fft computation of fields on a 3d image. *Cement and Concrete Research*, 41 :542–556, 2011.
- [17] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceeding of the Royal Society A*, 421 :376–396, 1957.
- [18] I.M. Gitman, H. Askes, and L.J. Sluys. Representative volume : Existence and size determination. *Engineering Fracture Mechanics*, 74 :2518–2534, 2007.
- [19] I.M. Gitman, M.B. Gitman, and H. Askes. Quantification of stochastically stable representative volumes for random heterogeneous materials. *Archive of Applied Mechanics*, 75 :79–92, 2006.
- [20] A. Gusev. Representative volume element size for elastic composites : A numerical study. *J. Mech. Phys. Solids*, 45 :1449–1459, 1997.
- [21] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, 29 :143–150, 1962.
- [22] Z. Hashin. Analysis of composite materials. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :481–505, 1983.
- [23] Z. Hashin and B.W. Rosen. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *Journal of applied mechanics*, :223–232, 1964.
- [24] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theorie of the elastic behavior of multiphase material. *J. Mech. Phys. Solids*, 11 :127–140, 1963.

- [25] S. Hazanov and C. Huet. Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume. *J. Mech.Phys. Solids*, 42 :1995–2011, 1994.
- [26] S. Hazanov and C. Huet. Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume. *J. Mech.Phys. Solids*, 42 :1995–2011, 1994.
- [27] E. Hervé, C. Stolz, and A. Zaoui. A propos de l’assemblage de sphères composites de hashin.
- [28] K. Hill. Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles. *J. Mech.Phys. Solids*, 11 :357–372, 1963.
- [29] R. Hill. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *J. Mech.Phys. Solids*, 13 :89–101, 1965.
- [30] hp FEM. Netgen - automatic mesh generator. [http ://www.hpfem.jku.at/netgen/](http://www.hpfem.jku.at/netgen/), 2003.
- [31] C. Huet. Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *J. Mech. Phys. Solids*, 38 :813–841, 1990.
- [32] M. Jiang, K. Alzebdeh, I. Jasiuk, and M. Ostoja-Starzewski. Scale and boundary conditions effects in elastic properties of random composites. *Acta Mech.*, 148(1-4) :63–78, 2001.
- [33] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *Int. J. Solids Struct.*, 40 :3647 – 3679, 2003.
- [34] E. Kröner. Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls. *Z. Phys.*, 151 :504–518, 1958.
- [35] N. Lahellec and P. Suquet. Effective behavior of linear viscoelastic composites : a time-integration approach. *Int. J. Solids Struct.*, 44 :507–529, 2007.
- [36] N. Lahellec and P. Suquet. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : I. Incremental variational principles. *J. Mech.Phys. Solids*, 55 :1932–1963, 2007.
- [37] N. Lahellec and P. Suquet. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : II. A second order procedure. *J. Mech. Phys. Solids*, 55 :1964–1992, 2007.
- [38] R. Masson and A. Zaoui. Self-consistent estimates for the rate-dependent elastoplastic behaviour of polycrystalline materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 47 :1543–1568, 1999.

- [39] L. Monetto and W.J. Drugan. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation for elastic composites containing randomly oriented spheroidal heterogeneities. *J. Mech. Phys. Solids*, 52 :359–393, 2004.
- [40] L. Monetto and W.J. Drugan. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and minimum rve size estimates for random elastic composites containing aligned spheroidal heterogeneities. *J. Mech. Phys. Solids*, 57 :1578–1595, 2009.
- [41] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. 21 :597–629, 1973.
- [42] S Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics : Overall Properties of Heterogenous Materials*. North Holland, Amsterdam, 1993.
- [43] M. Ostoja-Starzewski. Random field models of heterogeneous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 35 :2429–2455, 1998.
- [44] M. Ostoja-Starzewski. Material spatial randomness : From statistical to representative volume element. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21 :112–132, 2006.
- [45] G.C. Papanicolaou and S.R.S. Varadhan. Rigorous results in statistical mechanics in quantum field theory. *Colloquia mathematica societatis Janos Bolyai, North-Holland, Amsterdam*, pages 835–873, 1978.
- [46] C. Pelissou, J. Baccou, Y. Monerie, and F. Perales. Determination of the size of the representative volume element for random quasi-brittle composites. *International Journal of Solids and Structures*, 46 :2842–2855, 2009.
- [47] P. Ponte Castañeda and P. Suquet. Nonlinear composites. *Advances in Applied Mechanics*, 34 :171–302, 1997.
- [48] P. Ponte Castañeda and J.R. Willis. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, 43(12) :1919–1951, 1995.
- [49] A. Reuss. Calculation of the flow limits of mixed crystals on the basis of the plasticity of mono-crystals. *Z. Angew. Math. Mech*, 9 :49–58, 1929.
- [50] J.M. Ricaud and R. Masson. Effective properties of linear viscoelastic heterogeneous media : Internal variables formulation and extension to ageing behaviours. *Int. J. Solids Struct.*, 46 :1599–1606, 2009.
- [51] M. Rintoul and S. Torquato. Reconstruction of the structure of dispersions. *Journal of Colloid and Interface Science*, 186(2) :467–476, 1997.

- [52] K. Sab. On the homogenization and the simulation of random materials. *J. Mech.Phys. Solids*, 11 :585–607, 1992.
- [53] E. Sanchez-Palencia. *Non homogeneous media and vibration theory*. Springer, Berlin, 1980.
- [54] J. Segurado and J. Llorca. A numerical approximation to the elastic properties of sphere-reinforced composites.
- [55] C. Stolz and A. Zaoui. Analyse morphologique et approches variationnelles du comportement d'un milieu élastique hétérogène. *C. R. Acad. Sci. Paris, II*, 312 :143–150, 1991.
- [56] P. Suquet. *Elements of homogenization for inelastic solid mechanics*, volume 272, pages 193–278. Springer Verlag, 1987.
- [57] W. Voigt. Über die beziehung zwischen den beiden elasticitätsconstanten isotroper körper. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 38 :573–587, 1889.
- [58] L.J. Walpole. *Elastic behavior of composite materials : theoretical foundations*, volume 21, pages 160–242. Academic Press, New York, 1981.
- [59] J.R. Willis. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 25 :185–202, 1977.
- [60] J.R. Willis. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Adv. Appl. Mech.*, 21 :1–78, 1981.
- [61] F. Willot and D. Jeulin. Elastic behavior of composites containing boolean random sets of inhomogeneities. *International Journal of Engineering Science*, 47(2) :313–324, 2009.
- [62] F. Willot and D. Jeulin. Elastic behavior of composites containing boolean random sets of inhomogeneities. *International Journal of Engineering Science*, 47 :313–324, 2009.
- [63] F. Willot, Y.-P. Pellegrini, and P. Ponte Castañeda. Localization of elastic deformation in strongly anisotropic, porous, linear materials with periodic microstructures : Exact solutions and dilute expansions. *J. Mech.Phys. Solids*, 56(4) :1245–1268, 2008.
- [64] A. Zaoui. *Matériaux hétérogènes et composites*. Cours de l'École Polytechnique, Majeure 1, option matériaux et structures, 2000.

Annexes

Annexe A

Principe de maillage du VE de Voronoï

Grâce à la discrétisation en cellules de Voronoï, l'opération de maillage est relativement simplifiée. En effet, considérons une cellule de Voronoï et le centre de l'inclusion se trouvant dans cette cellule. Définissons ensuite les secteurs de la cellule de Voronoï délimités par les segments joignant le centre de la cellule d'une part, et les différents sommets de la cellule de Voronoï d'autre part. Avec cette répartition, on obtient le même type de motif qui se répète, à savoir un triangle contenant une portion de l'inclusion au niveau du sommet correspondant au centre de la cellule de Voronoï (voir figure A.1). Il suffira donc de définir un algorithme de maillage d'un secteur triangulaire de ce type, qu'on appliquera sur tous les secteurs triangulaires constituant une cellule de Voronoï, et ensuite à toutes les cellules de Voronoï constituant un VE. On obtient ainsi le maillage du VE par concaténation de toutes les cellules de Voronoï.

La première étape de maillage consiste à définir le segment $[P_1, P_6]$ perpendiculaire à la base de la cellule $[P_5, P_7]$ et passant par le centre P_1 de l'inclusion de celle-ci. On définit ainsi 7 points importants P_i , $1 \leq i \leq 7$, comme le montre la figure A.2, pour lesquels on définira différentes densités de maillage. Le segment présenté précédemment n'existe pas pour tous les secteurs triangulaires. Dans ces cas, les points P_3 et P_6 sont supprimés et la procédure de maillage au niveau des points restants sera identique au cas générique.

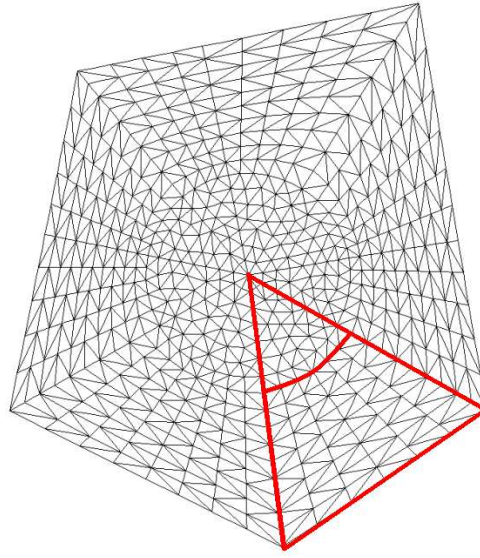


FIGURE A.1 – Simplification de l'opération de maillage

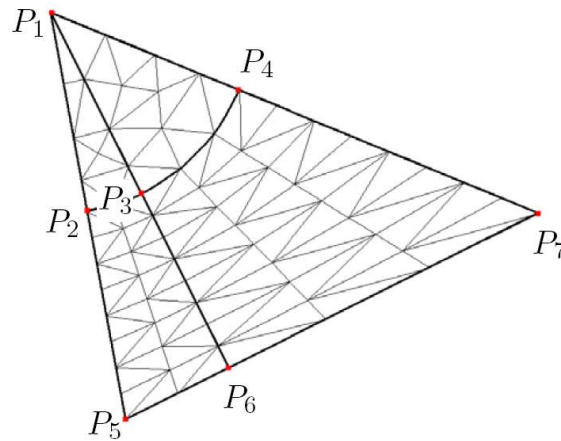


FIGURE A.2 – Maillage du motif élémentaire de la cellule de Voronoï

A.1 Paramètres de maillage dans le sens radial

A.1.1 Matrice

Pour déterminer les densités au niveau des points P_2 , P_3 et P_4 , on commence par calculer $N_j = \frac{D_{max}}{\frac{r}{\alpha}}$, où D_{max} est le maximum des longueurs des arrêtes extérieures constituant la cellule de Voronoï dans le sens radial. L'indice j fait référence au numéro de la cellule de Voronoï dans le VE, r est la valeur du rayon de l'inclusion, α est un paramètre de maillage ($\alpha > 1$), dont le rôle est de garantir une densité de maillage inférieure à r , c'est-à-dire on

exige pour tout secteur une discrétisation en élément de longueur $\ell_e < \frac{r}{\alpha}$. Pour rappel, dans Cast3M, la densité δ d'un point P fournit la longueur du premier élément partant de P . par exemple $DROI\ N\ P_1\ P_2\ \delta_1\ \delta_2$ va construire un segment de droite $[P_1, P_2]$ discrétisé en N pas dont la longueur du premier pas commençant en P_1 est égale à la densité δ_1 et où la longueur du $N^{\text{ème}}$ et dernier pas est égale à δ_2 .

Une fois N_j calculé pour chaque motif élémentaire, on applique à chaque arrête radiale $[P_2, P_5]$, $[P_3, P_6]$, $[P_4, P_7]$ une discrétisation en \tilde{N} pas où $\tilde{N} = \text{Sup}_j(N, N_j)$. L'entier N est un paramètre de maillage qui nous sert à garantir une valeur minimale au nombre de pas \tilde{N} dans la direction radiale. La discrétisation radiale en \tilde{N} pas est appliquée à tous les secteurs triangulaires élémentaires constituant une cellule de Voronoï.

On calcule ensuite la densité de maillage au niveau des points P_2 , P_3 et P_4 dans les segments $[P_2, P_5]$, $[P_3, P_6]$ et $[P_4, P_7]$ appartenant à la matrice en se basant sur la formule

$$\delta_{ar} = d_{ar}/\tilde{N} \quad (\text{A.1})$$

avec d_{ar} prend respectivement la valeur des longueurs des arrêtes $[P_2, P_5]$, $[P_3, P_6]$ et $[P_4, P_7]$. Le principe du maillage est de garantir un maillage fin au niveau du point du segment qui fait partie de l'interface matrice-inclusion (c'est-à-dire les points P_2 , P_3 et P_4) et un maillage moins fin au niveau des points opposés (c'est-à-dire les points P_5 , P_6 et P_7). Pour ce faire, nous introduisons le paramètre de maillage β ($\beta > \alpha$) dont le rôle est de calculer les termes d'une suite géométrique de raison q dont le premier terme vaut le pas de discrétisation $\delta_{init} = \frac{r}{\beta}$ affecté aux points de l'interface matrice-inclusion (c'est-à-dire les points P_2 , P_3 et P_4) et dont le dernier terme vaut $\delta_{fin} = q^{\tilde{N} - \frac{1}{\delta_{init}}}$ qui est le pas de discrétisation affecté aux points P_5 , P_6 et P_7 . \tilde{N} est le nombre de termes de la suite géométrique et sa raison q s'obtient par la résolution numérique de l'équation suivante

$$d_{ar} = \delta_{init} \frac{1 - q^{\tilde{N}}}{1 - q} \quad (\text{A.2})$$

Nous imposons enfin la condition suivante au maillage :

- Si $\delta_{ar} > \frac{r}{\beta}$ alors on affecte à δ_{ar} la valeur $\frac{r}{\beta}$
- Sinon on laisse $\delta_{ar} = d_{ar}/\tilde{N}$

A.1.2 Inclusion

Pour le maillage au sein de l'inclusion, on cherche à nouveau à obtenir un maillage fin du côté de l'interface matrice-inclusion et un maillage un peu plus grossier au centre de

l'inclusion. Pour cela, on affecte aux points P_2 , P_3 et P_4 les mêmes densités de maillage δ_{ar} calculées pour ces mêmes points dans la matrice. Afin de déterminer les pas de maillage δ_{inc} au niveau du centre de l'inclusion P_1 (il y en a 3 en fonction du segment considéré à savoir $[P_1, P_2]$, $[P_1, P_3]$ ou $[P_1, P_4]$), on se base sur l'utilisation d'une suite géométrique de raison \tilde{q} , dont le premier terme vaut le pas de maillage δ_{ar} au niveau des points P_2 , P_3 et P_4 , le dernier terme vaut le pas de maillage $\delta_{inc} = \delta_{ar}\tilde{q}^{M-1}$ au niveau du centre de l'inclusion, et où M est un paramètre de maillage qui représente le nombre de termes de la suite géométrique, c'est-à-dire le nombre de pas de discrétisation du segment considéré. La valeur du premier terme de la suite géométrique δ_{ar} est également connue, il reste donc à calculer les 3 valeurs de la densité de maillage δ_{inc} au niveau du centre de l'inclusion (c'est-à-dire 3 valeurs de \tilde{q}) à l'aide de la relation

$$r = \delta_{ar} \frac{1 - \tilde{q}^M}{1 - \tilde{q}} \quad (\text{A.3})$$

ceci respectivement pour les arrêtes $[P_1, P_2]$, $[P_1, P_3]$ et $[P_1, P_4]$, chaque arrête étant maillée avec sa densité respective δ_{inc} associée à P_1 .

A.2 Paramètres de maillage dans le sens orthoradial

A.2.1 Calcul des densités

Pour définir les densités δ_{arc} dans le sens orthoradial au niveau des points P_5 , P_6 et P_7 , on utilise la formule $\delta_{arc} = \frac{D-r}{N}$ où D désigne respectivement la distance P_2P_5 , P_3P_6 et P_4P_5 . L'intérêt de cette formule est de garantir un maillage d'autant plus fin que la distance entre l'inclusion et la base de la cellule de Voronoï est petite. Pour le maillage au niveau des points P_2 , P_3 du segment $[P_2, P_3]$ (respectivement au niveau des points P_3 , P_4 du segment $[P_3, P_4]$), on reporte le nombre d'éléments de l'arc délimité par les points P_5 et P_6 (respectivement P_6 et P_7) sur le segment $[P_2, P_3]$ (respectivement $[P_3, P_4]$). On remarque que les nombres d'éléments des arcs délimités par les points P_5 et P_6 et par les points P_6 et P_7 sont connus sous Cast3M dès lors que les densités des points P_5 , P_6 et P_7 sont connues. Il est impératif d'avoir le même nombre d'éléments de maillage dans les composants géométriques (segments ou arcs) opposés de la matrice car celle-ci est maillée avec la commande *DALL* qui à travers ce pré-requis réalise des maillages réguliers dont on contrôle totalement le nombre d'éléments. L'étape suivante du maillage dans le sens orthoradial consiste à introduire un paramètre α_0 qui est l'angle en *rad* tel que $r\alpha_0$ présente la longueur moyenne des éléments dans l'arc. Le

paramètre α_0 garantit un nombre minimal d'éléments de maillage dans le sens orthoradial. Pour cela, on calcule $N_0 = \lfloor \frac{L_{arc}}{r\alpha_0} \rfloor + 1$ où $\lfloor a \rfloor$ désigne la partie entière de a et L_{arc} est la longueur de l'arc délimité soit par les points P_2 et P_3 soit par les points P_3 et P_4 . On applique ensuite le test suivant :

Si $N_0 > N_{arc}^{el}$ alors remailler avec N_0 sinon laisser N_{arc}^{el}
 où N_{arc}^{el} est le nombre d'éléments de maillage sur l'arc. Pour les densités des points P_2 , P_3 et P_4 dans le sens orthoradial au sein de l'inclusion, on garde celles obtenues pour ces points dans la matrice. L'inclusion est maillée à l'aide de la commande *SURF*.

A.2.2 Test de pertinence du maillage

Nous avons remarqué que certains calculs éléments finis n'aboutissent pas à cause d'une anomalie du maillage. Cette anomalie se manifeste quand le pas de discrétisation δ_{ar} de la matrice dans le sens radial est beaucoup plus fin que le pas de discrétisation δ_{arc} au niveau de l'arc (voir figure A.3a). La conséquence de cette anomalie est la création à la frontière matrice-inclusion d'un élément de maillage de type triangle dont les arrêtes s'entrecoupent conduisant ainsi à une interruption de l'algorithme de calcul. Afin de garantir un pas de discrétisation δ_{arc} compatible avec le pas de discrétisation radiale δ_{ar} , nous imposons la vérification de la condition suivante

$$\delta_{arc} < r\theta_{max} \text{ où } \theta_{max} = \text{Arccos} \left(\frac{r}{r + \delta_{ar}} \right) \quad (\text{A.4})$$

qui empêche les arrêtes des éléments de la matrice de type triangle partant des points P_2 , P_3 et P_4 de se croiser. La figure A.3 illustre cette condition pour l'élément de type triangle partant du point P_2 , ce dernier étant hachuré. En recalculant N_0 par la formule $N_0 = \text{Sup} \left(\lfloor \frac{L_{arc}}{r\alpha_0} \rfloor + 1, \lfloor \frac{L_{arc}}{r\theta_{max}} \rfloor + 1 \right)$, nous imposons au maillage de vérifier la condition :

Si $N_0 > N_{arc}^{el}$ alors remailler avec N_0 sinon laisser N_{arc}^{el} .

En pratique, cela consiste à raffiner le maillage au niveau orthoradial de façon à ce qu'il soit compatible avec la finesse de maillage au niveau radial. Pour les applications numériques considérées au cours de ce mémoire, les paramètres de maillage ont été fixés à $N = 6, M = 4, \alpha = 2.5, \beta = 1.5$ en conformité avec l'étude portant sur la précision des calculs EF réalisée dans la section 1.7.1.

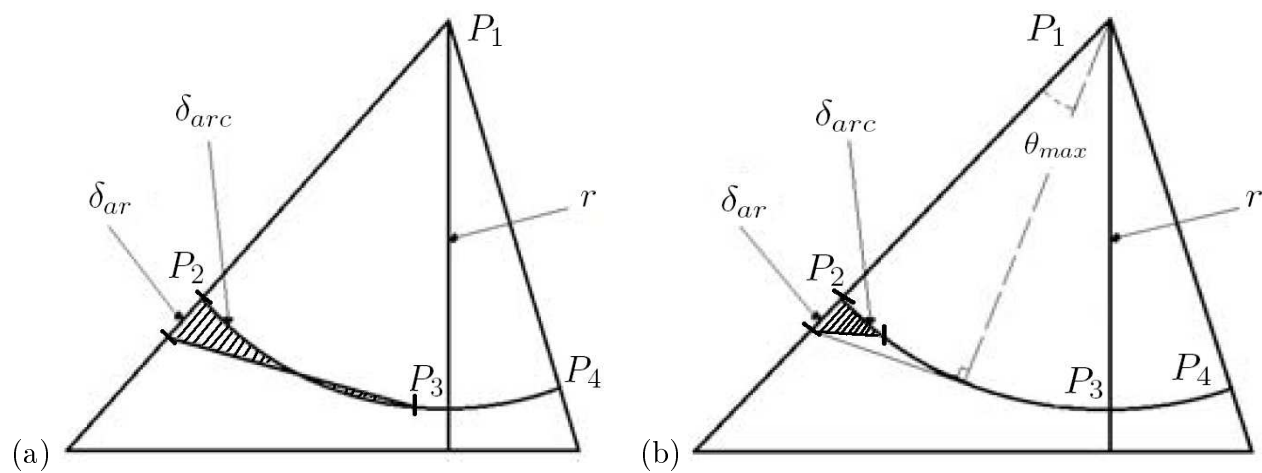


FIGURE A.3 – Exemple d'un mauvais maillage (a) et d'un bon maillage (b)

Annexe B

Algorithmes de calcul

Dans cette annexe, nous présentons sous forme d'organigrammes la structure des algorithmes de calcul que nous avons adoptés. La section B.1 décrit l'algorithme utilisé pour calculer les bornes issues de notre approche ainsi que tous les outils mis en œuvre à cette attention alors que la section B.2 est consacrée à l'algorithme utilisé pour calculer les bornes issues de VE carrés.

B.1 Approche par les VE non-carrés

Pour mettre en œuvre notre approche, nous avons utilisé les outils numériques suivants : le langage de programmation C compilé sous Linux avec le compilateur g++, le logiciel de calcul scientifique Matlab et le logiciel éléments finis Cast3M. Le programme principal est écrit en langage C et lance à l'aide de commandes Linux les deux autres logiciels quand il en a besoin. L'architecture de l'algorithme ainsi que le rôle de chaque outil sont explicités sur la figure B.1.

B.2 Approche par les VE carrés

Nous avons développé un algorithme qui calcule les propriétés apparentes et effective d'un matériau hétérogène de type matrice-inclusions en se basant sur l'approche de Huet [31] qui utilise des VE de formes géométriques carrées. Cet algorithme nous a permis de comparer les résultats de notre approche à ceux fournis dans la littérature. La structure

de cet algorithme est similaire à celle de l'algorithme présenté en B.1 avec cependant une différence pour le maillage des VE qui est désormais réalisé avec un logiciel de maillage. L'algorithme associé aux VE carrés utilise ainsi le langage de programmation C compilé sous Linux avec le compilateur g++, le logiciel éléments finis Cast3M et le logiciel de maillage Netgen. L'architecture de l'algorithme est explicitée sur la figure B.2.

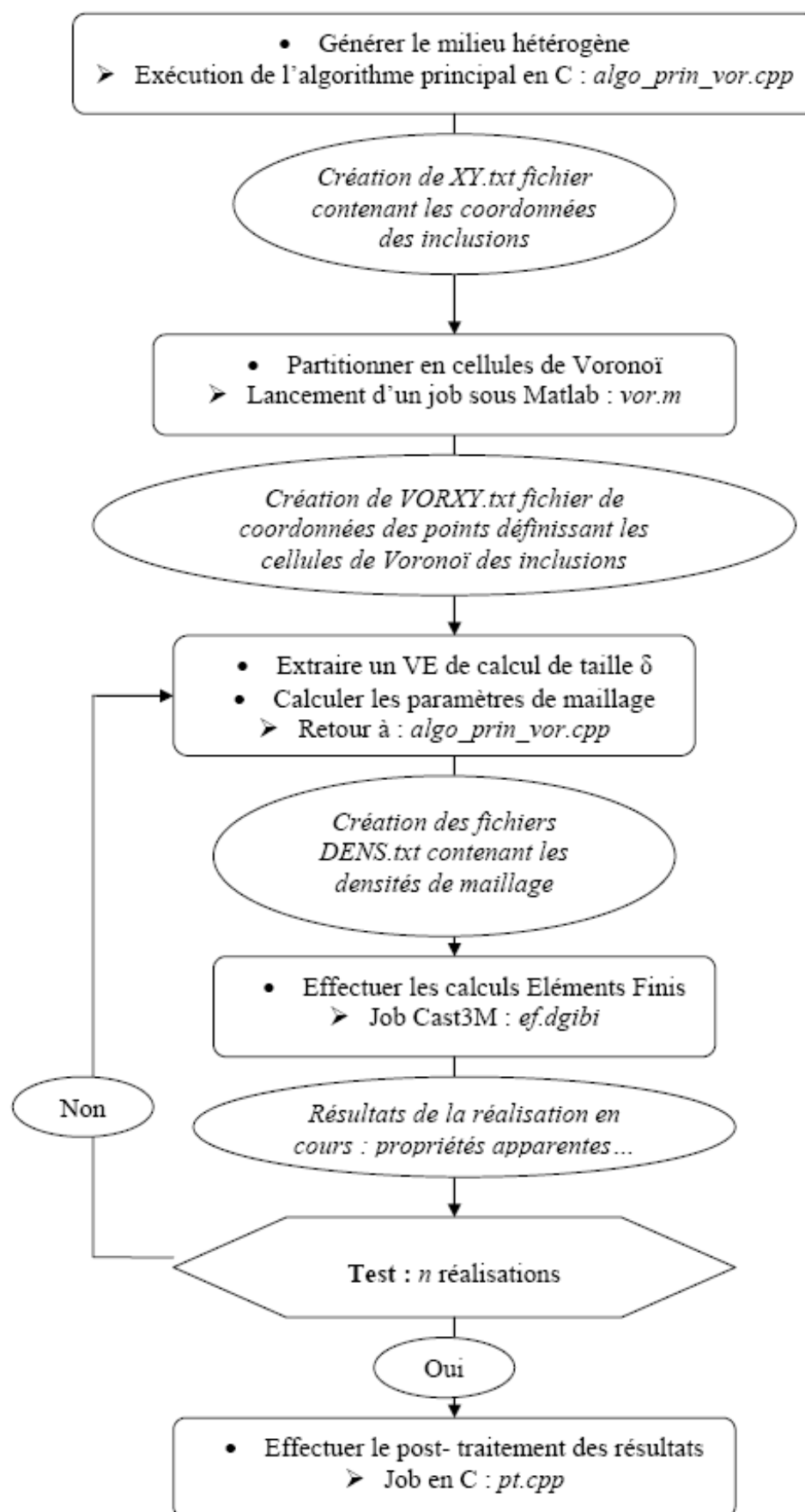


FIGURE B.1 – algo VOR

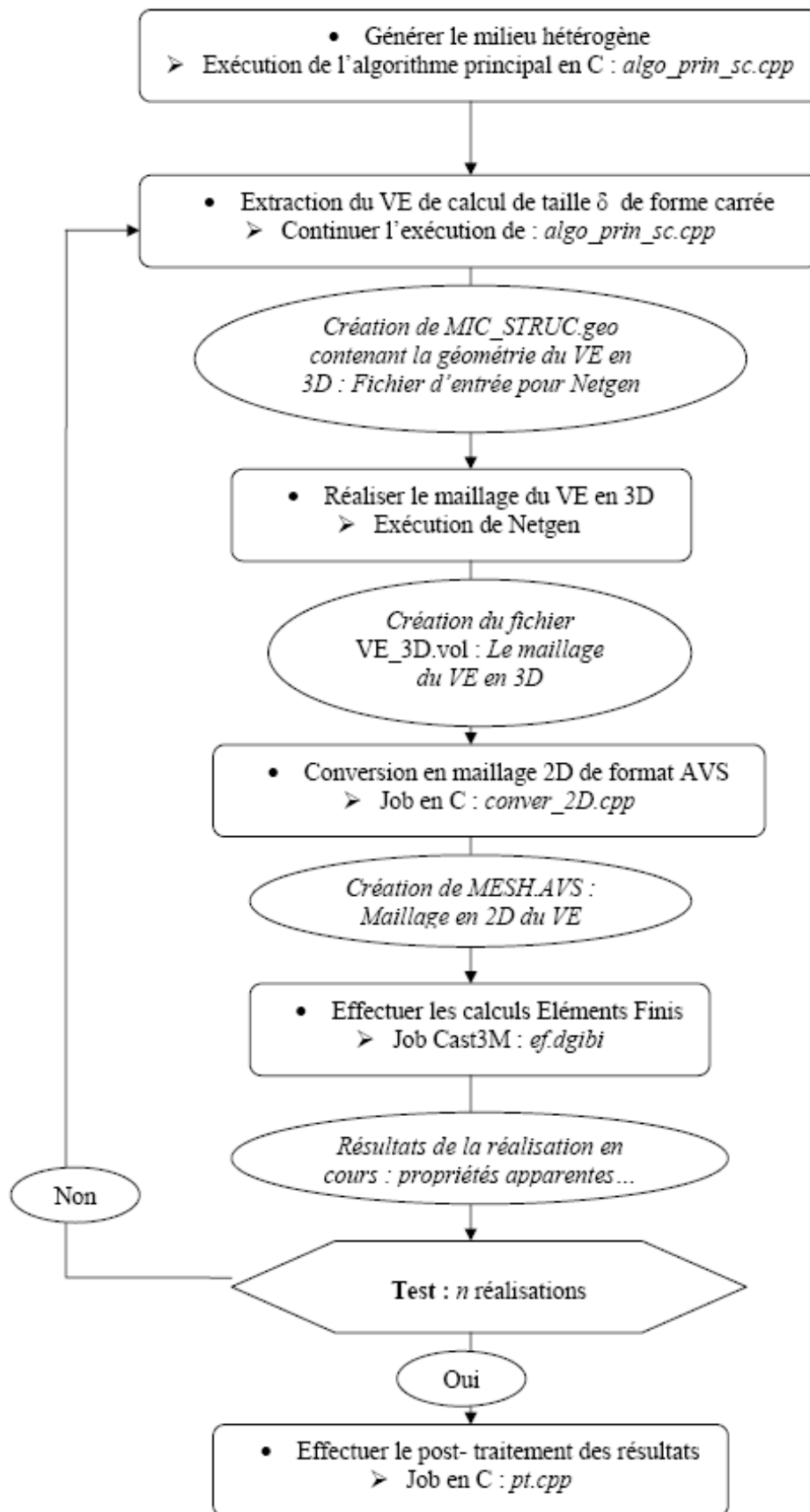


FIGURE B.2 – algo SC

Annexe C

Démonstration des nouvelles bornes dans le cas des CLCH

Similairement au cas des CLDA, le VE $B_\delta(\omega)$ de taille δ est scindé en 4 VE $B_{\delta',X^i}(\omega)$ (construits de la même façon que $B_\delta(\omega)$) de taille $\delta' = \frac{\delta}{2}$ et de volume $V_{\delta',X^i}(\omega)$ tel que $B_\delta(\omega) = \bigcup_{i=1}^4 B_{\delta',X^i}(\omega)$. A partir des solutions $\sigma_{(i)}^t(x, \omega)$ des problèmes locaux (1.5) définis sur les sous domaines non-carrés $\Omega_{\delta',X^i}(\omega)$ et associés à des CLCH, on construit un champ de contrainte virtuel $\tilde{\sigma}^t(x, \omega)$ défini sur le domaine $\Omega_{\delta,X}(\omega)$ statiquement admissible avec le problème (1.5) associé à des CLCH de sorte que sa restriction à chaque sous domaine $\Omega_{\delta',X^i}(\omega)$ corresponde aux champs $\sigma_{(i)}^t(x, \omega)$, i.e. $\tilde{\sigma}^t(x, \omega) = \sigma_{(i)}^t(x, \omega)$, $\forall x \in \Omega_{\delta',X^i}(\omega)$. Le théorème de l'énergie complémentaire associé au problème (1.5) défini sur $\Omega_{\delta,X}(\omega)$ pour des CLCH et appliqué à $\tilde{\sigma}^t(x, \omega)$ conduit à l'équation

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\delta(\omega)} \sigma^t(x, \omega) : \epsilon^t(x, \omega) dV \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_\delta(\omega)} \tilde{\sigma}^t(x, \omega) : \tilde{\epsilon}^t(x, \omega) dV \quad (\text{C.1})$$

où les champs $u^t(x, \omega)$, $\epsilon^t(x, \omega)$, $\sigma^t(x, \omega)$ sont solutions du problème variationnel (1.20) et où $\tilde{\epsilon}^t(x, \omega)$ est le champs de déformation admissible associé à $\tilde{\sigma}^t(x, \omega)$. En appliquant le lemme de Hill aux deux côtés de la relation (C.1) et en utilisant la définition (1.20) du comportement apparent appliquées aux VE $B_\delta(\omega)$ et $B_{\delta,X^i}(\omega)$ on obtient

$$V_{\delta,X}(\omega) S_\delta^t(\omega) \leq \sum_{i=1}^4 V_{\delta',X^i}(\omega) S_{\delta',X^i}^t(\omega). \quad (\text{C.2})$$

Comme le matériau est stationnaire, on a aussi

$$E(V_{\delta',X^i} S_{\delta',X^i}^t) = E(V_{\delta'} S_{\delta'}^t), \quad E(V_{\delta',X^i}) = E(V_{\delta'}) = E(V_\delta)/4 = E(V_{\delta,X})/4 \quad \forall i = 1, \dots, 4. \quad (\text{C.3})$$

La moyenne d'ensemble de (C.2) utilisée conjointement avec les relations (C.3) conduit à

$$\frac{E(V_\delta S_\delta^t)}{E(V_\delta)} \leq \frac{E(V_{\delta'} S_{\delta'}^t)}{E(V_{\delta'})} \quad \forall \delta' = \delta/2. \quad (\text{C.4})$$

Etant donné que l'équation (1.7) implique

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{E(V_\delta S_\delta^t)}{E(V_\delta)} = \frac{E(V_{\delta \rightarrow \infty} S^{eff})}{E(V_{\delta \rightarrow \infty})} = S^{eff} = (C^{eff})^{-1}, \quad (\text{C.5})$$

on obtient

$$S^{eff} \leq \frac{E(V_\delta S_\delta^t)}{E(V_\delta)} \leq \frac{E(V_{\delta'} S_{\delta'}^t)}{E(V_{\delta'})} \quad \forall \delta' = \delta/2. \quad (\text{C.6})$$

On utilise alors la propriété suivante : soient deux tenseur A et B du quatrième ordre inversibles, alors $A \leq B \Leftrightarrow B^{-1} \leq A^{-1}$ au sens des formes quadratiques. Cette propriété conduit au résultat recherché

$$(E(S_{\delta'}^t))^{-1} \leq (E(S_\delta^t))^{-1} \leq (S^{eff})^{-1} = C^{eff} \leq E(C_\delta^d) \leq E(C_{\delta'}^d) \quad \forall \delta' = \delta/2. \quad (\text{C.7})$$

